



TU Clausthal



Zur statistischen Auswertung experimenteller Wöhlerlinien

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Christian Müller
aus Clausthal-Zellerfeld

genehmigt von der
Fakultät für Mathematik/Informatik und Maschinenbau
der Technischen Universität Clausthal

Tag der mündlichen Prüfung
20. Februar 2015

Dekan: Prof. Dr.-rer. nat. Jürgen Dix
Vorsitzender der Promotionskommission: Prof. Dr.-Ing. Volker Wesling
Betreuer: Prof. Dr.-Ing. Alfons Esderts
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Lothar Wagner

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Maschinelle Anlagentechnik und Betriebsfestigkeit (IMAB) der TU Clausthal. Zahlreiche Personen haben die Voraussetzungen und den Fortschritt in der Arbeit mitgeprägt, wofür ich mich bedanken möchte.

An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Alfons Esderts für die Betreuung meiner Arbeit und insbesondere für die zur Verfügung gestellten, wissenschaftlichen Freiheiten und Möglichkeiten bedanken, die Voraussetzungen zur Erstellung dieser Arbeit waren.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Lothar Wagner danke ich für die Übernahme des Amtes als Zweitgutachter und der damit verbundenen Mühen.

Herrn Dr.-Ing. Karsten Hinkelmann gilt mein ganz besonderer Dank. Die gemeinsame wissenschaftliche Arbeit bereits während meiner Studentzeit und darüber hinaus als wissenschaftlicher Mitarbeiter haben mehr als nur den Grundstein für diese Arbeit gelegt. Zahlreiche Anmerkungen, Denkanstöße und motivierende Kritiken förderten das Verständnis für die bearbeitete Thematik nachhaltig und generierten einen steten, nachhaltigen Fortschritt. Wesentliche Anmerkungen in der Korrekturlesung haben der Arbeit einen erkennbaren Mehrwert verliehen.

Für die Motivation zur Bearbeitung des gewählten Themas, für die Denkanstöße sowie für die intensive Korrekturlesung möchte ich insbesondere Herrn Dr.-Ing. Rainer Masendorf danken.

Ebenso gilt mein Dank Herrn Dipl.-Ing. Michael Wächter für seine Unterstützung bei der Diskussion von Ergebnissen, der Versorgung mit Literaturstellen und seinen hilfreichen Anmerkungen bei der Korrekturlesung.

Frau Karin Friedrichs, den wissenschaftlichen Mitarbeitern der IMAB-Betriebsfestigkeit sowie der Werkstatt des IMABs sei für die gute Zusammenarbeit im Institutsalltag gedankt.

Meinen Eltern und meinem Bruder danke ich nicht zuletzt für ihre Unterstützung.

Kurzfassung

Metallische Bauteile, die einer zeitlich veränderlichen Belastung ausgesetzt sind, besitzen niedrigere Festigkeitskennwerte als bei rein statischer Belastung. Diese Eigenschaft wird in der sogenannten Wöhlerlinie dokumentiert, die den Zusammenhang zwischen ertragbarer Amplitude und zugehöriger Lebensdauer darstellt. Die Wöhlerlinie lässt sich durch Schwingfestigkeitsversuche experimentell ermitteln oder durch rechnerische Verfahren abschätzen. Zur experimentellen Ermittlung mit kraft- bzw. spannungsgeregelten Versuchen im Zeit- und Langzeitfestigkeitsbereich existieren zahlreiche Verfahren und Auswertemethoden, jedoch keine einheitlichen Regelwerke und Empfehlungen.

In der vorliegenden Arbeit werden zwei Kernthemen bearbeitet. Zum einen werden experimentelle Versuchsreihen auf ihre Wahrscheinlichkeitsfunktionen untersucht, deren Kenntnis notwendig ist, um Schwingfestigkeitsversuche sinnvoll auswerten zu können. Zum anderen werden für den Zeit- und Langzeitfestigkeitsbereich Monte-Carlo-Simulationen durchgeführt, um die zahlreichen Verfahren und Auswertemethoden zu bewerten und Empfehlungen abzuleiten. Weiterhin werden aus den Monte-Carlo-Simulationen Erkenntnisse über benötigte Mindeststichprobenumfänge und statistisch begründete Sicherheitsbeiwerte gewonnen.

Mit Hilfe von Literaturwerten und eigenen Versuchen wird eine Datenbasis von 66 Horizontenversuchen im Zeitfestigkeitsbereich aufgebaut. Dabei werden Versuchsreihen mit Stichprobenumfängen $19 \leq n \leq 500$ betrachtet. In Summe werden 5734 Einzelversuchsergebnisse in die Datenbasis aufgenommen. Auf die Versuchsreihen werden der Shapiro-Wilk-Test und Wahrscheinlichkeitspapiere zum Test auf die vorliegende Wahrscheinlichkeitsfunktion angewendet. Die Auswertungen zeigen, dass Schwingfestigkeitsversuche im Zeitfestigkeitsbereich mit erkennbarer Mehrheit einer logarithmischen Normalverteilung folgen. Untersuchungen im Langzeitfestigkeitsbereich finden aufgrund einer zu geringen Datenlage nicht statt.

Durch den Einsatz von Monte-Carlo-Simulationen werden Schwingfestigkeitsversuche im Zeit- und Langzeitfestigkeitsbereich am Rechner simuliert. Dabei kommen aufwändige Simulationsmodelle zum Einsatz, die die in der Praxis vorhandenen Schwierigkeiten in der Versuchsplanung, wie z.B. die Wahl der Prüfhorizonte, realitätsnah abbilden. Für den Zeitfestigkeitsbereich findet eine Untersuchung des Perlenschnur- und des Horizontenverfahrens statt. Im Langzeitfestigkeitsbereich werden das Treppenstufenverfahren, das Abgrenzungsverfahren, das kombinierte Verfahren nach Klubberg und das Probitverfahren analysiert.

Liegen nur geringere Erfahrungen über die zu ermittelnde Wöhlerlinie vor, dann sollte im Zeitfestigkeitsbereich das Perlenschnurverfahren angewendet werden. Fehlplatzierte Versuche werden mit dem Perlenschnurverfahren eher entdeckt. Bei ausreichenden Kenntnissen, z.B. aus Vorversuchen, kann mit dem Horizontenverfahren bei gleichem Stichprobenumfang in der Regel eine bessere Schätzung realisiert werden. Voraussetzung für eine erfolgreiche Anwendung des Horizontenverfahrens ist eine sichere Platzierung der Prüfhorizonte.

Im Langzeitfestigkeitsbereich sollte zur Schätzung des Lageparameters das Treppenstufenverfahren eingesetzt werden. Zur Schätzung des Streuparameters empfiehlt sich das Abgrenzungsverfahren. Das Abgrenzungsverfahren liefert insbesondere bei kleinen Stichprobenumfängen $n \leq 20$ erkennbar bessere Streuparameterschätzungen als das Treppenstufenverfahren.

Für die untersuchten Verfahren werden dem Versuchsingenieur Diagramme zur Verfügung gestellt, anhand derer er je nach geforderter Treffsicherheit den benötigten Stichprobenumfang für seinen Versuch festlegen kann. Im Umkehrschluss liefern die Diagramme bei festgelegtem Stichprobenumfang Aussagen über die zu erwartenden Treffsicherheiten.

Die Schätzung von Parametern, z.B. einer logarithmischen Standardabweichung, stellt insbesondere bei in der Betriebsfestigkeit üblichen, kleinen Stichprobenumfängen von $n \leq 20$ eine große Herausforderung dar. Daher ist es insbesondere für diese kleinen Stichprobenumfänge wünschenswert, statistisch begründete Sicherheitsbeiwerte zu verwenden. Die in der vorliegenden Arbeit erarbeiteten Diagramme zur Treffsicherheit der Versuchsverfahren liefern die benötigten Sicherheitsbeiwerte. Die Sicherheitsbeiwerte erlauben die Verwendung kleiner Stichprobenumfänge bei gleichzeitig vergleichsweise hoher Belastbarkeit der ausgewerteten Ergebnisse.

Abstract

Comparing static and oscillating loads on metallic components, the oscillating load to failure is less than the static one. The S-N-diagram represents the relation between load amplitude and cycles to failure. The S-N-diagram is usually gained using experimental methods. A mathematical estimation is possible, as well. A huge variety of experimental methods exists for obtaining the high-cycle- and long-life-fatigue regime. Guidelines and advices for load-controlled experiments are usually missing.

The presented work consists of two main topics. On the one hand experimental fatigue-results are examined concerning their probability function. The knowledge about the underlying probability function is necessary for evaluating fatigue experiments properly. On the other hand Monte Carlo simulations are performed in the high-cycle- and long-life-fatigue regime in order to evaluate and rate the existing methods. In addition, the simulative results can be used to obtain necessary sample sizes and statistically based safety factors.

Using existing literature and own tests a database of 66 experiments in the high-cycle-fatigue regime is established. 5734 single experimental results forming sample sizes of $19 \leq n \leq 500$ are available. The Shapiro-Wilk test and probability plots are used as goodness of fit tests of underlying probability functions. As a result it can be summarized that the majority of fatigue experiments in the high-cycle-fatigue regime are lognormally distributed. There is no examination of the long-life-fatigue regime because of a too small database.

Monte Carlo simulations are performed in the high-cycle- and long-life-fatigue regime. In this context complex models are used to map reality's challenges in experimental design to the simulation, e.g. placing the test horizons. In the high-cycle-fatigue regime the pearl string method and the horizon method are analysed. With respect to the long-life-fatigue regime the staircase method, the accrual method, Klubberg's combining method and the probit method are examined.

If there are not any experiences regarding the desired S-N-diagram the pearl string method should be used to determine the high-cycle-fatigue regime. Inaccurately placed specimens can be found more easily. Using the same sample size the horizon method is able to deliver more confident results than the pearl string method, if the test horizons can be placed accurately as a presupposition. Hence for the horizon method a high level of experience of the desired S-N-diagram is necessary in advance.

In the long-life-fatigue regime the staircase method is the best way to determine the location parameter. The determination of the deviation parameter should be done by the accrual method instead. The accrual method allows higher confident evaluation of the deviation parameter, especially with respect to small sample sizes, e.g. $n \leq 20$.

Diagrams representing the accuracy of the evaluated methods are given in the presented work. In conclusion the testing engineer is now able to determine the necessary sample size regarding his accuracy conditions. For given sample sizes the expected accuracy can be predicted in advance.

Estimating parameters, e.g. a standard deviation, is an ambitious task, especially if only small sample sizes are available. Sample sizes of $n \leq 20$ are quite usual in fatigue experiments. Hence the usage of statistically based safety factors is desirable. Statistically based safety factors are given in the accuracy diagrams of the evaluated methods in the presented work. Now the testing engineer has the possibility to use small sample sizes in combination with a high confidence of the test's results.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Zielsetzung	1
2	Zusammenfassung	4
3	Statistische Grundlagen	8
3.1	Wahrscheinlichkeitsfunktionen	8
3.1.1	Logarithmische Normalverteilung	9
3.1.2	Weibullverteilung	10
3.1.3	arcsin-Verteilung	11
3.2	Grundgesamtheit und Stichprobe	12
3.3	Testverfahren	15
3.3.1	Wahrscheinlichkeitspapier	15
3.3.2	Shapiro-Wilk-Test	18
3.4	Monte-Carlo-Simulationen	20
4	Verfahren zur Ermittlung der Wöhlerlinie	23
4.1	Grundlegendes zur Wöhlerlinie	23
4.2	Experimentelle Verfahren im Zeitfestigkeitsgebiet	25
4.2.1	Perlenschnurverfahren	25
4.2.2	Horizontenverfahren	26
4.3	Experimentelle Verfahren im Langzeitfestigkeitsgebiet	27
4.3.1	Treppenstufenverfahren	27
4.3.1.1	Auswertung nach Dixon-Mood	28
4.3.1.2	Auswertung nach der IABG-Methode	29
4.3.1.3	Auswertung nach Maximum-Likelihood	31
4.3.1.4	Auswertung nach Deubelbeiss	32
4.3.2	Abgrenzungsverfahren	33
4.3.3	Kombiniertes Verfahren nach Klubberg	35
4.3.4	Probitverfahren	36
4.4	Rechnerische Verfahren	37
5	Wahrscheinlichkeitsfunktionen für die Ermüdungsfestigkeit	39
5.1	Bestehende Untersuchungen zu Wahrscheinlichkeitsfunktionen in der Betriebsfestigkeit	40
5.2	Aufbau einer Datenbasis mit Horizontenversuchen mit hohem Stichprobenumfang	41
5.3	Analyse der Datenbasis auf ihre Wahrscheinlichkeitsfunktionen	45
6	Simulative Untersuchungen im Zeitfestigkeitsgebiet	48
6.1	Perlenschnurverfahren	49
6.1.1	Aufbau des Simulationsmodells	49
6.1.2	Ergebnisse der Lageschätzung (Schwingspielzahlschätzung)	51
6.1.3	Ergebnisse der Neigungsschätzung	54
6.1.4	Ergebnisse der Standardabweichungsschätzung	56
6.2	Horizontenverfahren	58
6.2.1	Aufbau des Simulationsmodells	58

6.2.2	Ergebnisse unter Berücksichtigung rechnerischer Wöhlerlinien bei der Versuchsplanung	61
6.2.3	Ergebnisse unter Berücksichtigung von detaillierten Vorkenntnissen bei der Versuchsplanung	63
6.2.3.1	Ergebnisse der Lageschätzung (Schwingspielzahlschätzung)	64
6.2.3.2	Ergebnisse der Neigungsschätzung	67
6.2.3.3	Ergebnisse der Standardabweichungsschätzung	68
6.3	Empfehlungen für Experimente im Zeitfestigkeitsgebiet	70
7	Simulative Untersuchungen im Langzeitfestigkeitsgebiet	72
7.1	Treppenstufenverfahren	73
7.1.1	Aufbau des Simulationsmodells	73
7.1.2	Erweiterung der Auswertung nach der IABG-Methode (erweiterte IABG- Methode)	76
7.1.3	Untersuchung des Einflusses des Stichprobenumfangs	79
7.1.3.1	Ergebnisse der Mittelwertschätzung	80
7.1.3.2	Ergebnisse der Standardabweichungsschätzung	81
7.1.4	Untersuchung des Einflusses des Stufensprungs	83
7.1.4.1	Ergebnisse der Mittelwertschätzung	84
7.1.4.2	Ergebnisse der Standardabweichungsschätzung	85
7.1.5	Empfehlungen für das Treppenstufenverfahren	87
7.2	Abgrenzungsverfahren	88
7.2.1	Aufbau des Simulationsmodells	88
7.2.2	Ergebnisse der Mittelwertschätzung	91
7.2.3	Ergebnisse der Standardabweichungsschätzung	94
7.2.4	Empfehlungen für das Abgrenzungsverfahren	96
7.3	Kombiniertes Verfahren nach Klubberg	97
7.3.1	Aufbau des Simulationsmodells	97
7.3.2	Ergebnisse der Standardabweichungsschätzung	98
7.4	Probitverfahren	101
7.4.1	Aufbau des Simulationsmodells	101
7.4.2	Ergebnisse der Mittelwertschätzung	103
7.4.3	Ergebnisse der Standardabweichungsschätzung	105
7.4.4	Empfehlungen für das Probitverfahren	107
7.5	Empfehlungen für Experimente im Langzeitfestigkeitsgebiet	108
8	Literaturverzeichnis	111
9	Symbolverzeichnis	117
10	Abkürzungsverzeichnis	121
11	Anhang	122
11.1	Einstufenversuche an Aluminiumschrauben	122
11.2	Streuspannen des Perlenschnurverfahrens	127
11.3	Streuspannen des Horizontenverfahrens	143
11.4	Streuspannen des Treppenstufenverfahrens mit erweiterter IABG-Methode	159

11.5 Streuspannen des Abgrenzungsverfahrens	161
11.6 Analytische Mittelwertstreuung für Stichproben aus einer Grundgesamtheit mit logarithmischer Normalverteilung	163
11.7 Analytische Varianzstreuung für Stichproben aus einer Grundgesamtheit mit logarithmischer Normalverteilung	164
11.8 Lebenslauf	165

1 Einleitung und Zielsetzung

Bauteile werden im Betrieb z.B. durch Kräfte, Momente und Drücke belastet. Die Belastungen rufen im Bauteil lokale Spannungen und Dehnungen hervor, die Beanspruchungen. Für die in der vorliegenden Arbeit angestellten Untersuchungen ist eine Unterscheidung zwischen Belastung und Beanspruchung nicht erforderlich. Daher wird im Folgenden lediglich von Beanspruchungen gesprochen. Um einen sicheren Betrieb der Bauteile zu gewährleisten, sind Festigkeitsnachweise zu erbringen, [DIN 743], [EN 13103], [FKM 12], [ISO 281], [ISO 6336]. In einem Festigkeitsnachweis werden die Beanspruchungen den Festigkeiten gegenüber gestellt. Dabei ist grundsätzlich ein statischer Festigkeitsnachweis gegen Sonderlastfälle wie z.B. Missbrauch zu führen. Erfahren die Bauteile im Betrieb zeitlich veränderliche Beanspruchungen, dann ist in der Regel ein zusätzlicher Ermüdungsfestigkeitsnachweis erforderlich.

Eine wesentliche Kenngröße im Ermüdungsfestigkeitsnachweis ist die Wöhlerlinie, die den Zusammenhang zwischen Beanspruchungen mit konstanter Amplitude (z.B. Sinusbeanspruchung) und zugehöriger Lebensdauer wiedergibt. Wöhlerlinien können experimentell bestimmt oder rechnerisch aus statischen Festigkeitskennwerten und weiteren Informationen, z.B. Geometriedaten, abgeschätzt werden. Ermüdungsfestigkeitsnachweise, die mit Hilfe experimenteller Wöhlerlinien geführt werden, weisen im Vergleich mit Nachweisen auf Basis rechnerischer Wöhlerlinien eine verbesserte Treffsicherheit auf, [Ellm 11].

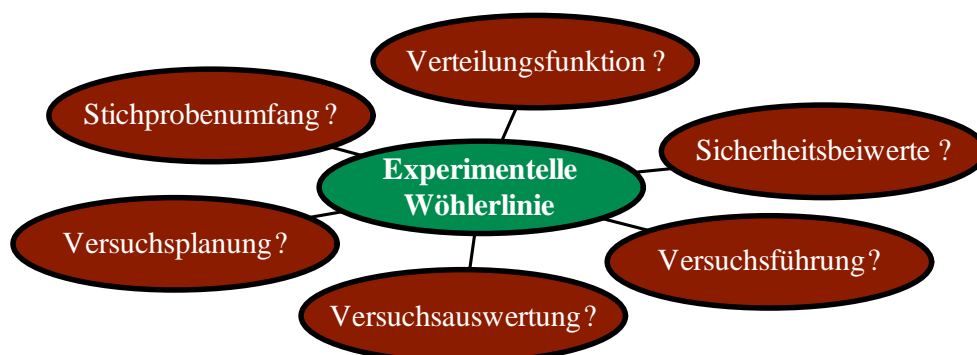


Abbildung 1.1: Fragestellungen bei der Ermittlung experimenteller Wöhlerlinien

Die experimentelle Ermittlung der Wöhlerlinie kann den beauftragten Versuchingenieur vor große Herausforderungen stellen, **Abbildung 1.1**. Der zu verwendende Stichprobenumfang wird häufig durch den Auftraggeber vorgegeben und ist meist aus Zeit- oder Kostengründen limitiert. In der Versuchsplanung muss sich für ein Verfahren zur Versuchsführung und anschließender Versuchsauswertung entschieden werden, um bei festgelegtem Stichprobenumfang ein optimales Ergebnis zu erzielen. Zahlreiche Verfahren zur Versuchsführung mit anschließender Auswertung existieren. Bestehende Normen wie [DIN 50100] regeln die Versuchsführung und die zu verwendende Auswertung kraft- bzw. spannungsgeregelter Versuche nur unzureichend. Für dehnungskontrollierte Versuche existiert im Gegensatz eine detaillierte Beschreibung, [SEP 1240]. Eine vergleichende, belastbare Bewertung der unterschiedlichen Verfahren und Auswertemethoden findet sich nur in Ausnahmefällen, [Liu 01], [Mart 11a], [Mart 11b] und [Müll 14]. Eine Maßzahl für die Güte der sich einstellenden Ergebnisse fehlt im Allgemeinen. Nicht zuletzt stellt sich bei der Auswertung der naturgemäß streuenden Versuchsergebnisse

die Frage nach der zu verwendenden Verteilungsfunktion. In der Praxis wird die Verteilungsfunktion häufig anhand von Empfehlungen der Fachliteratur gewählt, [Buxb 92], [FVA 554-I], [Haib 06], [Moye 93], [Rada 07], [Seif 04]. Die der Empfehlung zu Grunde liegende Datenbasis ist dabei meist unbekannt. Die Belastbarkeit einer vorliegenden Versuchsauswertung kann bisher kaum beantwortet werden. Die Verwendung statistisch begründeter Sicherheitsbeiwerte erlaubt es, auch mit geringen Stichprobenumfängen abgesicherte Ergebnisse zu erzielen. Derartige Sicherheitsbeiwerte sind bisher nur unzureichend bekannt.

Zielsetzung:

Die einleitend aufgeworfenen Fragestellungen, **Abbildung 1.1**, bezüglich kraft- bzw. spannungsgeregelter Wöhlerlinien, werden in dieser Arbeit behandelt. Dazu werden 66 experimentelle Versuchsreihen aus der Literatur und aus eigenen Experimenten mit Stichprobenumfängen zwischen $19 \leq n \leq 500$ auf ihre Verteilungsfunktionen untersucht. Insgesamt werden 5734 experimentelle Einzelversuche in die Untersuchung einbezogen. Diese umfangreiche Datenbasis beantwortet die Fragestellung, welche Verteilungsfunktion tendenziell für Schwingfestigkeitsversuche anzunehmen ist.

Die Beantwortung der Frage nach der zugrundeliegenden Verteilungsfunktion liefert die notwendige Voraussetzung zur Durchführung von Monte-Carlo-Simulationen. Mit deren Hilfe werden häufig zitierte Verfahren für den Zeit- und Langzeitfestigkeitsbereich bewertet, optimiert, verglichen und Empfehlungen für ihre Anwendung ausgearbeitet. Die Simulationen liefern die folgenden Antworten:

- Empfehlenswerte Verfahren und Auswertemethoden zur experimentellen Bestimmung der Zeitfestigkeitsgeraden
- Empfehlenswerte Verfahren und Auswertemethoden zur experimentellen Bestimmung des Langzeitfestigkeitsbereichs
- Festlegung des benötigten Mindeststichprobenumfangs mit Hilfe von Treffsicherheitskennzahlen
- Aussagen über die Belastbarkeit der zu erzielenden Ergebnisse bei festgelegtem Stichprobenumfang
- Anwendung statistisch begründeter Sicherheitsbeiwerte zur Erhöhung der Belastbarkeit der erzielten Ergebnisse

Dem Versuchsingenieur stehen mit der vorliegenden Arbeit abgesicherte Aussagen über die tendenziell für Schwingfestigkeitsversuche anzunehmende Verteilungsfunktion zur Verfügung. Er erhält klare Empfehlungen, welches Verfahren im Zeit- bzw. Langzeitfestigkeitsbereich die besten Ergebnisse liefert. Hinweise zur optimalen Versuchsführung werden gegeben. Für ein gewähltes Verfahren kann durch Vorgabe von Treffsicherheitsanforderungen in der Versuchsplanung der benötigte Mindeststichprobenumfang festgelegt werden. Bei, z.B. durch den Auftraggeber, bereits festgelegtem Stichprobenumfang lassen sich schon im Vorfeld Aussagen über die Belastbarkeit der zu erzielenden Ergebnisse treffen. Statistisch begründete Sicherheitsbeiwerte stehen mit der vorliegenden Arbeit zur Verfügung. Ihre Anwendung erlaubt es, Schwing-

festigkeitsversuche auch mit den üblicherweise kleinen Stichprobenumfängen durchzuführen und trotzdem eine hohe Belastbarkeit der Ergebnisse zu erreichen.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Vorgehen für Wöhlerversuche im Zeit- und Langzeitfestigkeitsbereich kann prinzipiell auch auf den VHCF-Bereich und auch auf Gaßnerlinien übertragen werden. Für den VHCF-Bereich sowie für Gaßnerlinien existieren praktisch keine Empfehlungen zur statistisch abgesicherten Versuchsführung und deren Auswertung, [FKM 292]. Der VHCF-Bereich sowie Gaßnerlinien werden in dieser Arbeit nicht behandelt.

2 Zusammenfassung

Die Ergebnisse der durchgeführten Arbeiten können in zwei Schwerpunkten zusammengefasst werden:

1. Untersuchung experimenteller Versuchsreihen auf ihre zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsfunktionen
2. Durchführung von Monte-Carlo-Simulationen für Einstufenversuche im Zeit- und Langzeitfestigkeitsgebiet
 - 2.1. Empfehlungen für Experimente im Zeitfestigkeitsgebiet
 - 2.2. Empfehlungen für Experimente im Langzeitfestigkeitsgebiet
 - 2.3. Wahl des benötigten Mindeststichprobenumfangs
 - 2.4. Verwendung statistisch begründeter Sicherheitsbeiwerte

Wahrscheinlichkeitsfunktionen in der Betriebsfestigkeit:

Mittels einer Literaturrecherche und eigenen Experimenten an Aluminiumschrauben wird eine Datenbasis mit Horizontenversuchen aufgebaut, die 66 Versuchsreihen im Zeitfestigkeitsgebiet enthält. Die Datenbasis beinhaltet neben Werkstoffproben aus unterschiedlichen Werkstoffgruppen auch ausgeführte Bauteile wie Schrauben und Wälzlager. Die experimentellen Versuchsreihen besitzen Stichprobenumfänge zwischen $19 \leq n \leq 500$. In Summe werden 5734 Einzelversuche in die Datenbasis aufgenommen. Mit Hilfe der Datenbasis wird untersucht, ob die in der Betriebsfestigkeit häufig getroffene Annahme einer logarithmischen Normalverteilung oder einer zweiparametrischen Weibullverteilung zutreffend ist. Logarithmische Normalverteilung und zweiparametrische Weibullverteilung werden jeweils durch einen Lage- und einen Streuparameter beschrieben und sind damit direkt vergleichbar. Eine Untersuchung mit der dreiparametrischen Weibullverteilung findet aufgrund der nicht gegebenen Vergleichbarkeit nicht statt. Als Bewertungsinstrumente kommen Wahrscheinlichkeitspapiere und der Shapiro-Wilk-Test zum Einsatz.

Eine Untersuchung im Langzeitfestigkeitsgebiet findet nicht statt. In der Literatur finden sich nicht genügend Versuchsreihen mit ausreichend hohem Stichprobenumfang, so dass eine statistisch abgesicherte Aussage möglich wäre. Durch die notwendige, diskrete Platzierung von Lasthorizonten im Langzeitfestigkeitsgebiet müssen an die notwendigen Stichprobenumfänge höhere Ansprüche gestellt werden als im Zeitfestigkeitsgebiet.

Aus dem Vergleich der Wahrscheinlichkeitspapiere für die Zeitfestigkeitsversuchsreihen ergibt sich, dass die logarithmische Normalverteilung die Lebensdauerversuche im Zeitfestigkeitsgebiet in der Regel besser approximiert als die zweiparametrische Weibullverteilung. Die Nullhypothese der logarithmischen Normalverteilung für Lebensdauerversuche im Zeitfestigkeitsgebiet wird für die untersuchten Versuchsreihen durch den Shapiro-Wilk-Test in knapp 79 % ($\alpha = 5 \%$) bzw. gut 68 % ($\alpha = 10 \%$) aller Fälle angenommen. Die in der Betriebsfestigkeit weit verbreitete Annahme, dass Lebensdauerversuche in der Regel einer logarithmischen Normalverteilung folgen, wird mit statistischen Methoden belegt.

Empfehlungen für Experimente im Zeitfestigkeitsgebiet:

Zur experimentellen Ermittlung der Zeitfestigkeitsgeraden findet unter Verwendung von Monte-Carlo-Simulationen eine Analyse der folgenden Verfahren statt:

- Perlenschnurverfahren
- Horizontenverfahren

In der Literatur vorhandene Simulationsmodelle werden um die Abbildung der in der Praxis vorhandenen Streuung der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit erweitert. Weiterhin findet eine Untersuchung des Einflusses rechnerischer Wöhlerlinien auf die Versuchsführung statt. Damit werden zu den aus Literatur bekannten Ergebnissen neue Erkenntnisse generiert.

Liegen für das Experiment im Zeitfestigkeitsgebiet keinerlei Erfahrungen vor, dann sollte mit rechnerischen Wöhlerlinien eine Vorabschätzung der mittleren Wöhlerlinie angestrengt werden. Typische Werte für die logarithmische Standardabweichung können für die Versuchsplanung der Literatur entnommen werden. Als Verfahren zur Ermittlung der Zeitfestigkeitsgeraden sollte bei fehlenden Erfahrungen das Perlenschnurverfahren Verwendung finden, da fehlplatzierte Versuche in den Übergangsbereichen eher erkannt und von der Auswertung ausgeschlossen werden können. Auf Basis der rechnerischen Wöhlerlinien lässt sich die erste Probe im Schwerpunkt der geschätzten Zeitfestigkeitsgeraden platzieren. Die Gefahr eines ungültigen Versuchs ist dort am geringsten. Ausgehend von der ersten experimentellen Lebensdauer sollten die weiteren Proben an den Rändern zu den Übergangsbereichen konzentriert werden.

Liegen ausreichende Erfahrungen, z.B. aus Vorversuchen mit dem Perlenschnurverfahren, vor, dann kann das Horizontenverfahren angewendet werden. Mit ihm lassen sich Lage und Neigung der Wöhlerlinie bei gleichem Stichprobenumfang mit einer höheren Schätzgüte vorhersagen als mit dem Perlenschnurverfahren. Voraussetzung dafür ist das sichere Platzieren der Lasthorizonte nahe den Übergangsbereichen. Die Platzierung auf Basis rechnerischer Wöhlerlinien ist dafür nicht zuverlässig genug. Fehlplatzierte Lasthorizonte werden nicht oder zu spät erkannt. Lage- und Neigungsschätzung werden fehlerhaft.

Ein großer Vorteil des Horizontenverfahrens ist die Möglichkeit für jeden Lasthorizont eine separate, logarithmische Standardabweichung ausweisen zu können. Wird von diesem Vorteil Gebrauch gemacht, ist der zur Verfügung stehende Stichprobenumfang auf die Lasthorizonte aufzuteilen. Für die Standardabweichungsschätzung steht dann nicht der gesamte Stichprobenumfang zur Verfügung. Unter der Annahme, dass sich die logarithmische Standardabweichung über dem Zeitfestigkeitsgebiet praktisch nicht ändert, können im Horizonten- und Perlenschnurverfahren alle Einzelversuche mit der geschätzten Wöhlerlinienneigung auf einen gemeinsamen Lasthorizont verschoben werden. Damit steht der gesamte Stichprobenumfang zur Schätzung der Standardabweichung zur Verfügung. Die Schätzung erfolgt zuverlässiger.

Empfehlungen für Experimente im Langzeitfestigkeitsgebiet:

Zur experimentellen Ermittlung der Langzeitfestigkeit findet eine Untersuchung der folgenden Verfahren statt:

- Treppenstufenverfahren
 - Auswertung nach Dixon-Mood
 - Auswertung nach (erweiterter) IABG-Methode
 - Auswertung nach Maximum-Likelihood
 - Auswertung nach Deubelbeiss
- Abgrenzungsverfahren
- Kombiniertes Verfahren nach Klubberg
- Probitverfahren

Für die IABG-Methode im Treppenstufenverfahren wird zur Abschätzung der logarithmischen Standardabweichung eine Näherungsgleichung für das bisher notwendige Diagramm ermittelt (erweiterte IABG-Methode). Die Näherungsgleichung hebt den zuvor eingeschränkten Definitionsbereich auf. Die verschiedenen Auswertemethoden sind erstmalig vollständig vergleichbar.

Für das Treppenstufenverfahren und das kombinierte Verfahren nach Klubberg kommt ein in der Literatur vorhandenes Simulationsmodell zum Einsatz. Das bestehende Simulationsmodell wird zusätzlich auf die in der Literatur bisher nicht untersuchten Verfahren Abgrenzungsverfahren und Probitverfahren angepasst.

Allen Verfahren ist gemeinsam, dass eine sorgfältige Versuchsplanung und Versuchsdurchführung Voraussetzungen dafür sind, um ein belastbares Ergebnis zu erzielen. Dazu gehört eine möglichst genaue Abschätzung des Langzeitfestigkeitsgebiets, um einen günstigen Startwert der Versuchsreihe zu erhalten, und eine Abschätzung der auftretenden, logarithmischen Standardabweichung zur weiteren Platzierung der Versuchshorizonte. Erfahrungswerte, rechnerische Wöhlerlinien und Literaturwerte können dabei eine große Hilfe darstellen.

Ist im Langzeitfestigkeitsgebiet nur die Ermittlung des logarithmischen Mittelwerts von Interesse, dann sollte der Versuch nach dem Treppenstufenverfahren organisiert werden. Die Auswertung kann mit einer beliebigen Methode erfolgen, da alle vergleichbare Ergebnisse liefern. Praktikabel sind die Methode nach Dixon-Mood und die IABG-Methode, die den ungeübten Anwender automatisch vor der Verwendung von evtl. unzulässigen Ergebnissen aus dem Abschnitt der Versuchsreihe schützen.

Soll neben dem Mittelwert auch die logarithmische Standardabweichung ermittelt werden, dann ist bei Stichprobenumfängen von $n \leq 40$ das Abgrenzungsverfahren zu bevorzugen. Für das Abgrenzungsverfahren wird eine optimierte Strategie zur Wahl der Prüfhorizonte vorgeschlagen. Für Stichprobenumfänge $n > 40$ liefern das Abgrenzungsverfahren und das Treppenstufenverfahren mit erweiterter IABG-Methode vergleichbare Ergebnisse. Das Treppenstufenverfahren besitzt die Eigenschaft, sich selbstständig um den Mittelwert zu konzentrieren. Dadurch

kann das Treppenstufenverfahren einen ungünstig gewählten Startwert bei ausreichend hohem Stichprobenumfang ausgleichen. Das Abgrenzungsverfahren besitzt diese Eigenschaft nicht. Im Fall der theoretischen, idealen Platzierung der Lathorizonte ist das Abgrenzungsverfahren dem Treppenstufenverfahren bei der Schätzung der logarithmischen Standardabweichung immer überlegen.

Zur Wahl des Stichprobenumfangs:

Der für einen Versuch benötigte Stichprobenumfang hängt von der geforderter Schätzgüte für den logarithmischen Mittelwert bzw. die logarithmische Standardabweichung ab. Mit den in der Arbeit angegebenen Diagrammen und Tabellen für die möglichen Schätzgüten lässt sich der mindestens benötigte Stichprobenumfang ermitteln. Dabei ist anzumerken, dass bei gleicher geforderter Schätzgüte für Mittelwert und Standardabweichung für die Standardabweichungsschätzung ein mehr als Faktor 100 größerer Stichprobenumfang notwendig sein kann als für die Mittelwertschätzung.

Zur Verwendung statistisch begründeter Sicherheitsbeiwerte:

Die Diagramme und Tabellen zur Wahl des mindestens benötigten Stichprobenumfangs können nach der Versuchsauswertung für die Auswahl von Sicherheitsbeiwerten dienen. Erfolgt die Versuchsführung und die anschließende Auswertung mit einem der empfohlenen Verfahren, dann werden logarithmischer Mittelwert und logarithmische Standardabweichung erwartungstreu geschätzt. Aus den Schätzgüten der Mittelwert- bzw. Standardabweichungsschätzung lassen sich Sicherheitsbeiwerte ableiten, mit denen die Auswertungsergebnisse multipliziert werden können. Dadurch lassen sich z.B. Ergebnisse vorhersagen, die in 90 % aller Fälle auf der sicheren Seite liegen. Das bedeutet, bei zehn unter gleichen Bedingungen durchgeführten und ausgewerteten Versuchen liegen neun Vorhersagen auf der sicheren Seite und nur eine auf der unsicheren. Dieses Konfidenzniveau ist nicht gleichbedeutend mit der Ausfallwahrscheinlichkeit. Unter Verwendung der Sicherheitsbeiwerte lassen sich auch mit vergleichsweise kleinen Stichprobenumfängen belastbare Versuchsergebnisse erzielen.

Beispiele zur Wahl des mindestens benötigten Stichprobenumfangs und zur Anwendung der Sicherheitsbeiwerte sind in der Arbeit angegeben.

3 Statistische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die statistischen Grundlagen erklärt, die für das Verständnis der vorliegenden Arbeit erforderlich sind. Dazu werden als erstes die in der Betriebsfestigkeit häufig angenommenen Wahrscheinlichkeitsfunktionen logarithmische Normalverteilung, Weibullverteilung und arcsin-Verteilung vorgestellt. Anschließend werden die Begriffe Grundgesamtheit und Stichprobe erläutert. Weiterhin wird darauf eingegangen, wie sich die Parameter der Grundgesamtheit, z.B. die der logarithmischen Normalverteilung, aus einer Stichprobe schätzen lassen.

Das Schätzen von Parametern der Grundgesamtheit kann in der Regel nur dann sinnvoll stattfinden, wenn die Familie der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Grundgesamtheit bereits bekannt ist. Dazu existieren in der Statistik die sogenannten Testverfahren, auf die im dritten Teil dieses Kapitels eingegangen wird. Mit ihnen lassen sich Hypothesen annehmen oder verwerfen. Unter einer Hypothese ist in diesem Fall zu verstehen, ob eine Stichprobe einer bestimmten Verteilungsfunktion gehorcht.

Abschließend wird das Prinzip der Monte-Carlo-Simulationen vorgestellt. Mit Monte-Carlo-Simulationen lassen sich bei bekannter Grundgesamtheit am Rechner theoretisch beliebig viele Stichproben generieren.

Die statistischen Grundlagen in diesem Kapitel werden am Beispiel der Schwingenspielzahl N vorgestellt. Sie gelten analog auch für andere Zufallsgrößen.

3.1 Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Werden n Bauteile unter gleichen Bedingungen einer Lebensdauerprüfung unterworfen, dann wird sich für jedes Bauteil eine ähnliche, aber im Einzelfall unterschiedliche, Lebensdauer oder Schwingenspielzahl N ergeben, **Abbildung 3.1**. Die Lebensdauer von Bauteilen unterliegt folglich einer Streuung. Die in einem Versuch ermittelten Schwingenspielzahlen können in ein Histogramm überführt werden, das einen ersten Aufschluss über deren Verteilung liefert, **Abbildung 3.1**. In einem Histogramm werden Zufallszahlen in Klassen eingeteilt und die Häufigkeiten in den Klassen über ihnen selbst dargestellt, **Abbildung 3.1**, [Hart 09]. Nachteile eines Histogramms sind dessen unstetiger, getreppter Verlauf sowie das Fehlen von Informationen außerhalb der Grenzen der Versuchsergebnisse. Unter der Überlegung, dass der Stichprobenumfang n gedanklich unendlich groß und die Klassenbreite des Histogramms gleichzeitig unendlich klein wird, geht das Histogramm in eine kontinuierliche Funktion $p(N)$ über, die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, **Abbildung 3.1**. Wie auch beim Histogramm ist bei der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion die durch ein Intervall begrenzte Fläche unter der Kurve (Integral) ein Maß für die Auftretenswahrscheinlichkeit der Zufallsgröße (hier die Schwingenspielzahl) im gewählten Intervall, [Fahr 07]. Die Stammfunktion (=Integral) einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wird als Wahrscheinlichkeitsfunktion $P_A(N)$ bezeichnet.

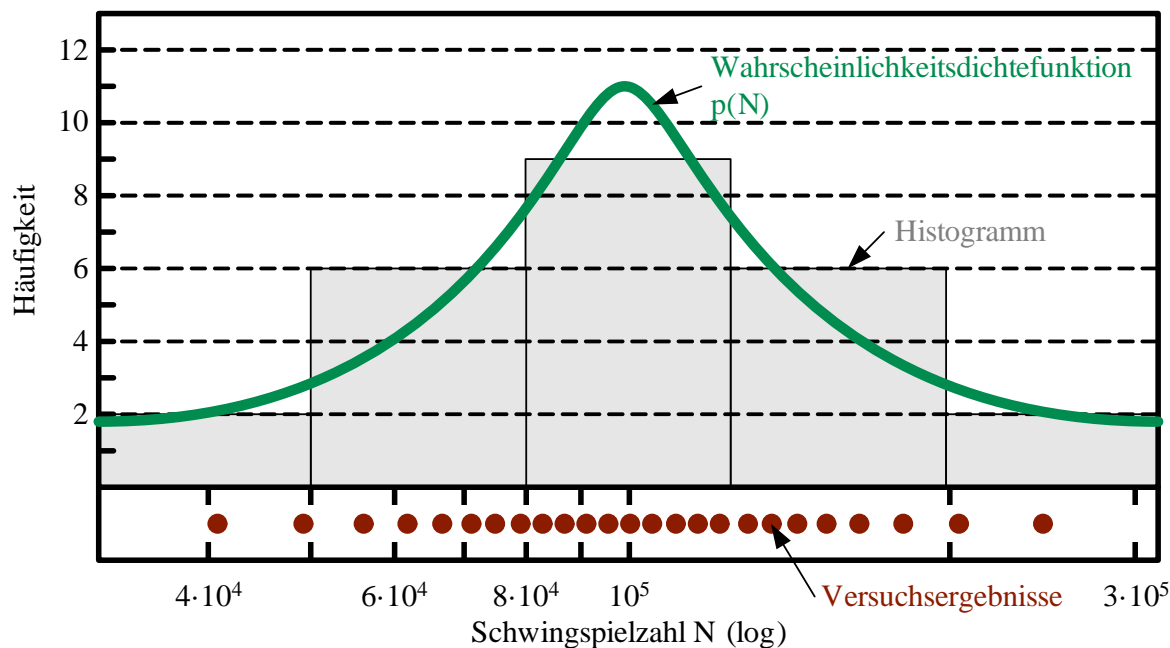


Abbildung 3.1: Überführung eines Histogramms in eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

In der Literatur finden sich zahlreiche Wahrscheinlichkeitsfunktionen wie z.B. die Normalverteilung, die logarithmische Normalverteilung, [Fahr 07] und [Sach 06], die Weibullverteilung, [Weib 39] und [Weib 51], die Studentverteilung, [Stud 08], die χ^2 -Verteilung, [Pear 00], und die arcsin-Verteilung, [Fish 22]. In der allgemeinen Betriebsfestigkeit besitzt die logarithmische Normalverteilung die größte Bedeutung, [Buxb 92], [Haib 06] und [Rada 07]. Für Ermüdungsvorgänge bei Wälzbeanspruchung, z.B. Wälzlager oder Grübchentragsfähigkeit von Zahnradern, wird in der Regel die Weibullverteilung verwendet, [Lund 47], [Lund 50], [Niem 06] und [Palm 64]. In Einzelfällen wird die arcsin-Verteilung insbesondere bei der Schätzung der Langzeitfestigkeit eingesetzt, [Klub 95]. Hier werden die logarithmische Normalverteilung, die Weibullverteilung und die arcsin-Verteilung aufgrund ihrer großen Bedeutung in der Betriebsfestigkeit näher vorgestellt.

3.1.1 Logarithmische Normalverteilung

Die logarithmische Normalverteilung, **Abbildung 3.2**, funktioniert analog zur Normalverteilung, wenn die Merkmalswerte, z.B. die Schwingspielzahlen N , vorher logarithmiert werden, [Fahr 07] und [Sach 06]. Die logarithmische Normalverteilung wird durch den Lageparameter logarithmischer Mittelwert der Grundgesamtheit $N_{50\%,GG}$ und den Streuparameter logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit $s_{\log,N,GG}$ vollständig beschrieben, Gleichung (3.1). Dabei ist unter der logarithmischen Standardabweichung die Standardabweichung der logarithmierten Merkmalswerte zu verstehen.

$$p(N) = \frac{1}{s_{\log,N,GG} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\lg(N) - \lg(N_{50\%,GG})}{s_{\log,N,GG}} \right)^2} \quad (3.1)$$

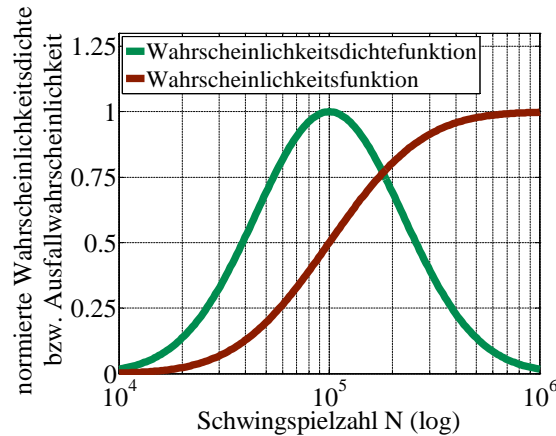


Abbildung 3.2: Wahrscheinlichkeits- und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer logarithmischen Normaverteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte auf Maximum normiert)

3.1.2 Weibullverteilung

Die allgemeine Weibullverteilung, **Abbildung 3.3 links**, ist eine dreiparametrische Verteilungsfunktion, [Bert 08]. Sie besitzt wie die logarithmische Normalverteilung einen Lageparameter T_{GG} und einen Streuparameter b_{GG} . Zusätzlich ist eine ausfallfreie Zeit $N_{0,GG}$ vorhanden. Für Schwingungszahlen $N \leq N_0$ sagt die dreiparametrische Weibullverteilung eine Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 0$ hervor, **Abbildung 3.3 links**. Der Lageparameter der Grundgesamtheit T_{GG} wird als charakteristische Lebensdauer und der Streuparameter b_{GG} als Weibullformparameter bezeichnet. Gleichung (3.2) gibt die Wahrscheinlichkeitsfunktion der dreiparametrischen Weibullverteilung wieder.

$$P_A(N) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{N-N_{0,GG}}{T_{GG}-N_{0,GG}}\right)^{b_{GG}}}, & \text{falls } N \geq N_{0,GG} \\ 0, & \text{falls } N < N_{0,GG} \end{cases} \quad (3.2)$$

Eine besondere Form der Weibullverteilung ergibt sich, wenn die ausfallfreie Zeit $N_{0,GG} = 0$ beträgt, **Abbildung 3.3 rechts**. Dieser Spezialfall wird auch als zweiparametrische Weibullverteilung bezeichnet, [Bert 08], Gleichung (3.3).

$$P_A(N) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{N}{T_{GG}}\right)^{b_{GG}}}, & \text{falls } N \geq 0 \\ 0, & \text{falls } N < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Bei bekannter ausfallfreier Zeit $N_{0,GG}$ kann jede dreiparametrische Weibullverteilung in eine zweiparametrische Weibullverteilung überführt werden, indem ein transformiertes Merkmal N^* und eine transformierte, charakteristische Lebensdauer T_{GG}^* Verwendung finden, [Rieg 12].

$$N^* = N - N_{0,GG} \quad (3.4)$$

$$T_{GG}^* = T_{GG} - N_{0,GG} \quad (3.5)$$

Mit der dreiparametrischen Weibullverteilung können Zufallsexperimente aufgrund des dritten Parameters ausfallfreie Zeit $N_{0,GG}$ besser approximiert werden als mit der zweiparametrischen

Form, [Bert 08]. Ein direkter Vergleich zwischen drei- und zweiparametrischer Weibullverteilung oder gar der logarithmischen Normalverteilung ist jedoch aufgrund der unterschiedlichen Voraussetzungen nicht zulässig. Sinnvoll miteinander vergleich- und gegeneinander bewertbar sind die zweiparametrische Weibullverteilung und die logarithmische Normalverteilung. Beide Funktionen besitzen je einen Lage- und einen Formparameter. Zusätzlich liefern beide Funktionen für Schwingenspielzahlen $N > 0$ Ausfallwahrscheinlichkeiten $P_A > 0$ und sonst $P_A = 0$. Weiterhin umgeht der Anwender bei der zweiparametrischen Weibullverteilung und der logarithmischen Normalverteilung die unter Umständen aufwändige Bestimmung der ausfallfreien Zeit z.B. nach [Mann 75]. Daher wird die dreiparametrische Weibullverteilung im Folgenden aufgrund des unzulässigen Vergleichs nicht weiter betrachtet.

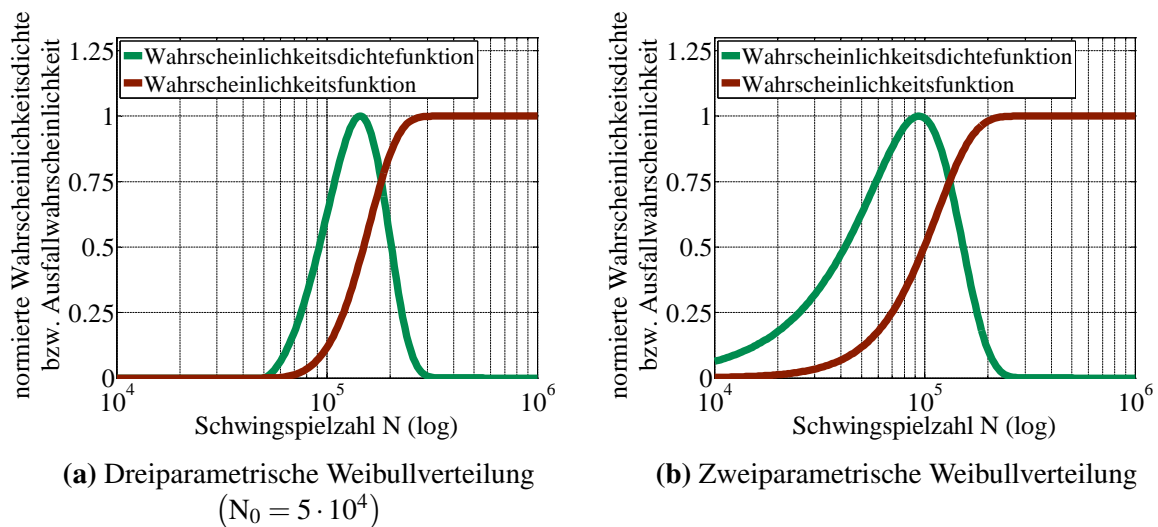


Abbildung 3.3: Wahrscheinlichkeits- und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer drei- und einer zweiparametrischen Weibullverteilung (Wahrscheinlichkeitsdichten auf Maximum normiert)

3.1.3 arcsin-Verteilung

Die arcsin-Verteilung, Gleichung (3.6), wird gelegentlich zur Auswertung von Langzeitfestigkeitsversuchen eingesetzt, z.B. in [Deng 75] und [Klub 95]. Sie besitzt einen Lageparameter a_S und einen Formparameter b_S .

$$N = a_S + b_S \cdot \arcsin\left(\sqrt{P_A}\right) \quad (3.6)$$

Durch Umformen von Gleichung (3.6) in die Wahrscheinlichkeitsfunktion, Gleichung (3.7), wird deutlich, dass die arcsin-Verteilung beidseitig begrenzt ist, **Abbildung 3.4**.

$$P_A(N) = \sin^2\left(\frac{N - a_S}{b_S}\right), \quad a_S \leq N \leq a_S + b_S \cdot \frac{\pi}{2} \quad (3.7)$$

Aufgrund dieser Begrenzung wird die Anwendung der arcsin-Verteilung in [Bert 08] nicht empfohlen. [Spick 07] zeigt am Beispiel der Langzeitfestigkeit von Dieseleinspritzdüsen, dass die arcsin-Verteilung zur Beschreibung des Langzeitfestigkeitsbereichs ungeeignet ist. Die arcsin-Verteilung findet daher im Folgenden keine Anwendung.

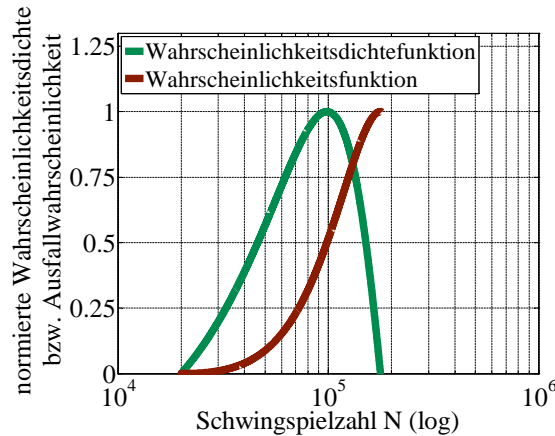


Abbildung 3.4: Wahrscheinlichkeits- und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer arcsin-Verteilung mit $a_S = 2 \cdot 10^4$ und $b_S = 1 \cdot 10^5$ (Wahrscheinlichkeitsdichte auf Maximum normiert)

3.2 Grundgesamtheit und Stichprobe

In einem Gedankenexperiment werden alle existierenden Bauteile eines Typs unter gleichen Bedingungen einer Lebensdauerprüfung unterworfen. Die sich ergebenden Lebensdauern lassen sich in einer mathematischen Menge zusammenfassen. Da es sich um alle existierenden Lebensdauern handelt, wird diese Menge als Grundgesamtheit bezeichnet, **Abbildung 3.5**. Ihr können z.B. die Parameter logarithmischer Mittelwert $N_{50\%,GG}$ und logarithmische Standardabweichung $s_{\log,N,GG}$ zugewiesen werden, **Abbildung 3.5**.

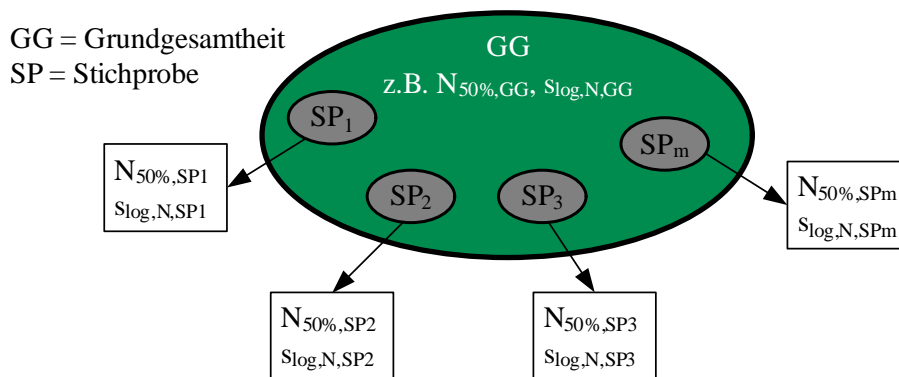


Abbildung 3.5: Grundgesamtheit (GG) und Stichprobe (SP) einer Menge von Zufallszahlen

In der Regel besteht nicht die Möglichkeit, die Grundgesamtheit zu erfassen. Viel mehr müssen aus der Grundgesamtheit repräsentative Stichproben vom Stichprobenumfang n gezogen werden, aus denen auf die Grundgesamtheit geschlossen wird, **Abbildung 3.5**. Dazu existieren einfache Gleichungen oder auch vergleichsweise aufwändige Verfahren wie die Maximum-Likelihood-Schätzung, [Hart 09]. Mit den Schätzungen aus der Stichprobe sollen die korrespondierenden Parameter der Grundgesamtheit weder systematisch über- noch unterschätzt werden. Diese wünschenswerte Eigenschaft wird als Erwartungstreue bezeichnet, [Fahr 07].

Für eine Stichprobe lassen sich die Parameter logarithmischer Mittelwert der Stichprobe $N_{50\%,SP}$ und logarithmische Standardabweichung der Stichprobe $s_{\log,N,SP}$ mit den nachfolgenden Gleichungen erwartungstreu schätzen, [Mart 11a] und [Mart 11b].

$$\lg(N_{50\%,SP}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lg(N_i) \quad (3.8)$$

$$N_{50\%,SP} = 10^{\lg(N_{50\%,SP})} \quad (3.9)$$

$$s_{\log,N,SP} = \frac{n-0,74}{n-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\lg(N_i) - \lg(N_{50\%,SP}))^2}, \text{ für 1D-Daten} \quad (3.10)$$

$$s_{\log,N,SP} = \frac{n-1,74}{n-2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (\lg(N_i) - \lg(N_{50\%,SP}))^2}, \text{ für 2D-Daten} \quad (3.11)$$

Gleichung (3.10) und Gleichung (3.11) bestehen jeweils aus zwei Faktoren: Einem Vorfaktor und der logarithmischen Stichprobenstandardabweichung unter Berücksichtigung der Freiheitsgradanzahl. Die Vorfaktoren bewältigen die erwartungstreu Korrektur der logarithmischen Stichprobenstandardabweichung. Ohne diese Korrektur unterschätzt die logarithmische Stichprobenstandardabweichung die logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit systematisch, [Fahr 07]. An dieser Stelle sei angemerkt, dass Gleichung (3.10) und Gleichung (3.11) erwartungstreu bezüglich des Erwartungswerts sind, wenn eine logarithmisch-normalverteilte Grundgesamtheit vorliegt.

Um aus einer Stichprobe die logarithmische Stichprobenstandardabweichung zu berechnen, ist der logarithmische Mittelwert erforderlich, der selbst wiederum ein Schätzwert ist. Aus mathematischer Sicht wird dadurch ein Freiheitsgrad verloren, weshalb in Gleichung (3.10) auf $n-1$ normiert wird. Gleichung (3.10) findet z.B. beim Horizontenverfahren, Kapitel 4.2.2, Anwendung, wenn die logarithmische Standardabweichung auf jedem Lasthorizont separat geschätzt wird.

Muss eine Stichprobe zunächst mit einem geschätzten Parameter umgerechnet werden, damit die logarithmische Standardabweichung überhaupt geschätzt werden kann, dann geht ein weiterer Freiheitsgrad verloren. In diesem Fall ist eine Normierung auf $n-2$ notwendig, Gleichung (3.11). Beim Perlenschnurverfahren, Kapitel 4.2.1, wird z.B. die Stichprobe mit einer geschätzten Wöhlerlinienneigung auf einen gemeinsamen Lasthorizont umgerechnet und anschließend die logarithmische Standardabweichung geschätzt. Daher ist beim Perlenschnurverfahren Gleichung (3.11) anzuwenden.

Gleichung (3.8) bis Gleichung (3.11) können auch berechnet werden, wenn die Stichprobe einer weibullverteilten Grundgesamtheit entstammt. Die berechneten Schätzer sind auch dann Maßzahlen für Lage und Streuung, jedoch helfen sie bei der Bestimmung der Weibullparameter nicht direkt weiter. Zur Schätzung der Parameter einer Weibullverteilung existieren keine einfachen Gleichungen. Im Falle einer zweiparametrischen Weibullverteilung können die charakteristische Lebensdauer und der Weibullformparameter aber z.B. aus einem Wahrscheinlichkeitspapier bestimmt werden, [Sach 06], siehe Kapitel 3.3.1. Zur Schätzung der ausfallfreien Zeit für eine dreiparametrische Weibullverteilung sei auf [Mann 75] verwiesen. Alternativ kann die Maximum-Likelihood-Schätzung Anwendung finden, [Sach 06].

Werden unter gleichen Bedingungen ausreichend viele Stichproben aus der Grundgesamtheit gezogen und z.B. jeweils die Parameter logarithmischer Mittelwert und logarithmische Standardabweichung der Stichproben berechnet, dann können für die Stichprobenparameter eigene Histogramme angefertigt werden. Die Histogramme hängen von der Grundgesamtheit ab und lassen sich wieder in Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen überführen. So kann z.B. dem logarithmischen Mittelwert der Stichprobe selbst wieder ein Lage- und ein Streuparameter zugewiesen werden, **Abbildung 3.6**.

Mit den Histogrammen bzw. den Wahrscheinlichkeitsfunktionen kann die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der statistischen Kennwerte einer Stichprobe angegeben werden. Daraus können sogenannte Konfidenzintervalle abgeleitet werden, [Fahr 07] und [Sach 06]. Die Konfidenzintervalle beschreiben wie sicher die Parameter der Grundgesamtheit einer Stichprobe geschätzt werden können.

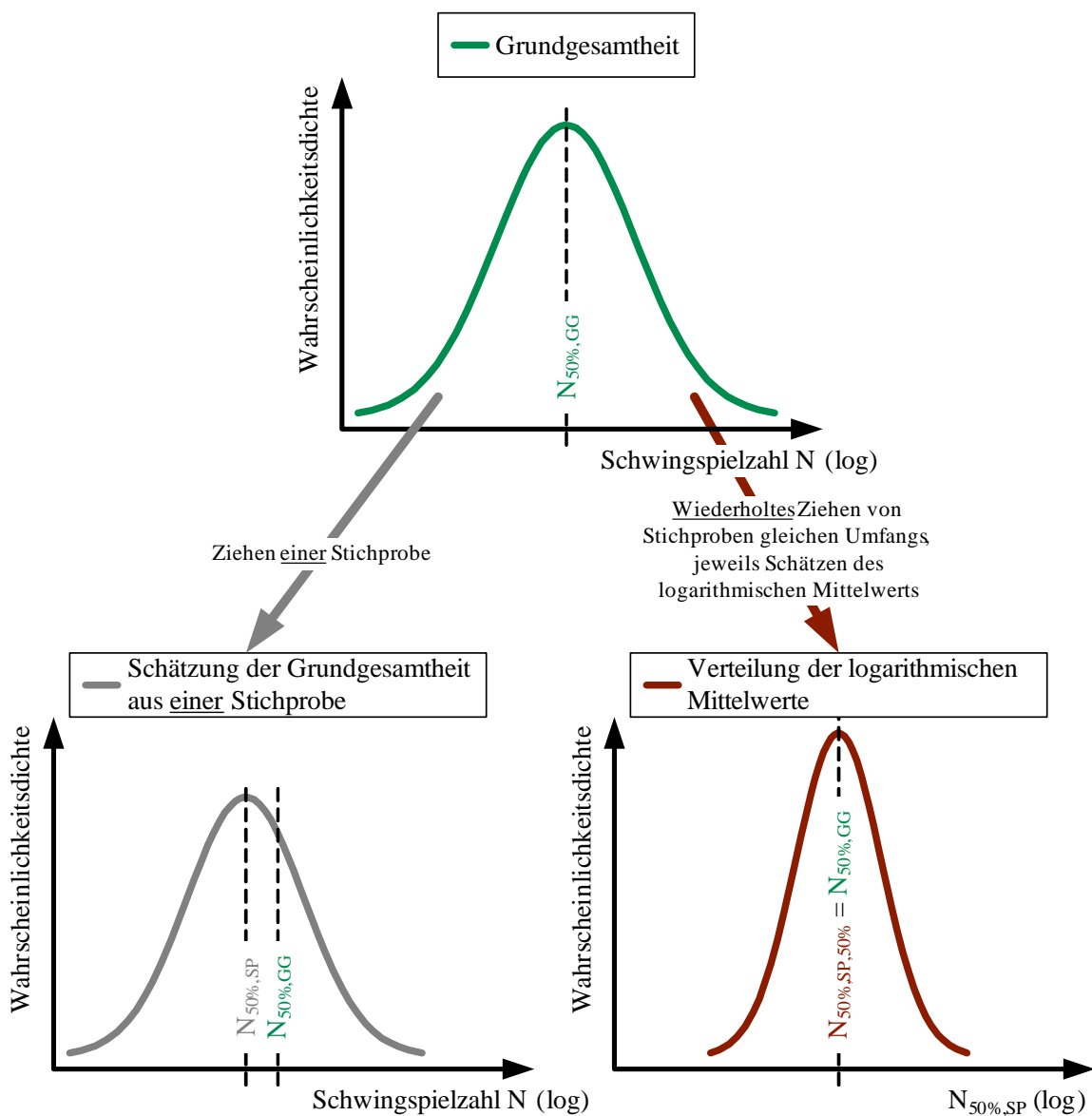


Abbildung 3.6: Grundgesamtheit, Stichprobe und Verteilung der logarithmischen Mittelwerte von Stichproben bei einer logarithmisch-normalverteilten Grundgesamtheit

3.3 Testverfahren

In den vorangegangenen Kapiteln wurden Wahrscheinlichkeitsfunktionen vorgestellt. Ebenfalls wurde angesprochen, wie sich die Parameter der Verteilungen aus einer Stichprobe schätzen lassen. Um eine Parameterschätzung sinnvoll durchzuführen, muss bereits bekannt sein, ob die Stichprobe z.B. aus einer logarithmisch-normalverteilten oder weibullverteilten Grundgesamtheit entstammt. Zur Beantwortung dieser Fragestellung existieren in der Statistik die sogenannten Testverfahren. Die Testverfahren werden auf die Stichprobe angewendet. Ergebnis des Tests ist die Bestätigung oder die Ablehnung einer Hypothese. Eine Hypothese ist im hier betrachteten Fall z.B. die Behauptung, die Stichprobe entstamme einer logarithmisch-normalverteilten Grundgesamtheit.

Hier sollen als Testverfahren das anschauliche Wahrscheinlichkeitspapier, [Hart 09] und [Sach 06], und der Shapiro-Wilk-Test, [Shap 65], besprochen werden. Der Shapiro-Wilk-Test besitzt unter allen Testverfahren die höchste Aussagekraft beim Test auf Normalverteilung bzw. logarithmische Normalverteilung, [Sach 06]. Ein Alternative zum Shapiro-Wilk-Test mit ähnlicher hoher Aussagekraft bietet der Anderson-Darling-Test, [Ande 52] und [Step 74]. Neben den genannten Testverfahren existieren zahlreiche weitere, für die auf die Literatur verwiesen wird, [Dago 86], [Fahr 07], [Hart 09], [Sach 06].

3.3.1 Wahrscheinlichkeitspapier

Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P_A(N)$ kann jeder Schwingspielzahl N eine Ausfallwahrscheinlichkeit P_A zugewiesen werden. Eine Schwingspielzahl mit zugehöriger Ausfallwahrscheinlichkeit wird auch als Quantil bezeichnet. Fallen z.B. bis zu einer Schwingspielzahl $N = 10^5$ $P_A = 10\%$ aller Bauteile aus, dann handelt es sich bei $N = 10^5$ um das 10 %-Quantil.

In einem Wahrscheinlichkeitspapier wird die Ausfallwahrscheinlichkeit P_A über dem zugehörigen Quantil aufgetragen. Dabei werden die Skalierungen für Abszisse und Ordinate derart angepasst, dass sich eine Gerade ergibt, [Hart 09] und [Sach 06]. Für die logarithmische Normalverteilung gelingt das durch Transformation auf die Standardnormalverteilung mit ihrem Quantil u , Gleichung (3.12). Die Standardnormalverteilung ist eine Normalverteilung mit Mittelwert Null und Standardabweichung Eins, [Fahr 07].

$$u = \frac{1}{s_{\log,N,GG}} \cdot \lg(N) - \frac{\lg(N_{50\%,GG})}{s_{\log,N,GG}} \quad (3.12)$$

Auf der Ordinate wird das Quantil u aufgetragen, als Beschriftung wird jedoch die zugehörige Ausfallwahrscheinlichkeit P_A verwendet, **Abbildung 3.7 links**. Stichproben, die in einem Wahrscheinlichkeitspapier nach **Abbildung 3.7 links** eine Gerade ergeben, folgen einer logarithmischen Normalverteilung.

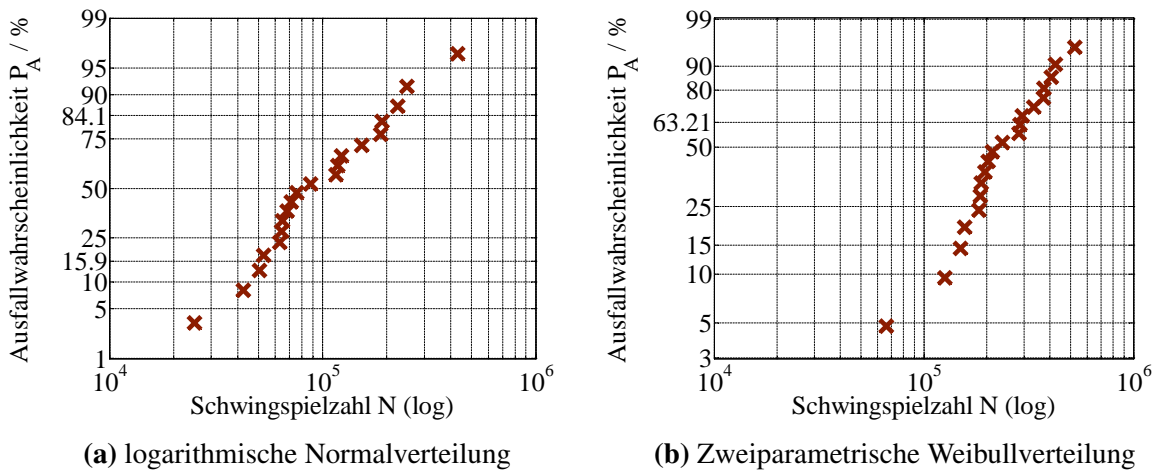


Abbildung 3.7: Wahrscheinlichkeitspapier einer logarithmischen Normal- und einer zweiparametrischen Weibullverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der zweiparametrischen Weibullverteilung, Gleichung (3.3), lässt sich direkt in eine Geradengleichung überführen, Gleichung (3.13). Damit ergibt sich ein Wahrscheinlichkeitspapier wie in **Abbildung 3.7 rechts**. Stichproben, die in einem Wahrscheinlichkeitspapier nach **Abbildung 3.7 rechts** eine Gerade ergeben, folgen einer zweiparametrischen Weibullverteilung. Wie auch bei der logarithmischen Normalverteilung wird die Achsenbeschriftung der Ordinate entsprechend angepasst.

$$\lg(-\ln(1 - P_A)) = b_{GG} \cdot \lg(N) - b_{GG} \cdot \lg(T_{GG}) \quad (3.13)$$

Bei kleinen Stichprobenumfängen $n \ll 20$ unterscheiden sich die Ergebnisse in den Wahrscheinlichkeitspapieren für die logarithmische Normalverteilung bzw. die Weibullverteilung nur unwesentlich.

Liegt eine Stichprobe vom Umfang n vor, dann kann sie der Größe nach aufsteigend geordnet werden. In Abhängigkeit der Positionsnummer i und des Stichprobenumfangs n kann jeder Schwingspielzahl N der Stichprobe mit Hilfe von Näherungsgleichungen eine Ausfallwahrscheinlichkeit P_A zugeordnet werden, [FVA 304] und [Sach 06]. Zur Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit existieren zahlreiche Näherungsgleichungen, z.B. [Barn 75], [Blom 58], [Deub 74], [Haze 14], [Hück 94], [Ross 64], [Weib 39]. In [FVA 304] wird für Größen, die einer logarithmischen Normalverteilung entstammen, die Näherungsgleichung nach [Ross 64], Gleichung (3.14), vorgeschlagen.

$$P_A = \frac{3i - 1}{3n + 1} \quad (3.14)$$

Im Falle einer Weibullverteilung schlägt [FVA 304] Gleichung (3.15) vor.

$$P_A = \frac{i}{n + 1} \quad (3.15)$$

Mit Hilfe linearer Regression, [Fahr 09], über die Wertepaare lassen sich die Verteilungsparameter bestimmen. Die Regression wird dabei in Richtung der Schwingspielzahl durchgeführt, [Mart 11b]. Zu einer linearen Regessionsrechnung lässt sich ein Bestimmtheitsmaß $0 \leq r^2 \leq 1$

berechnen. Das Bestimmtheitsmaß gibt an, wie groß der Anteil des Zufallsexperiments ist, der durch die lineare Näherung beschrieben werden kann. Im besten Fall ergibt sich ein Bestimmtheitsmaß von $r^2 = 1 = 100\%$, [Fahr 07] und [Fahr 09]. Mit dem Bestimmtheitsmaß existiert ein Gütekriterium, auf dessen Basis sich eine anfänglich formulierte Hypothese annehmen oder ablehnen lässt. Weiterhin erlaubt das Bestimmtheitsmaß vergleichende Betrachtungen. Z.B. kann eine Stichprobe mit dem Wahrscheinlichkeitspapier auf logarithmische Normalverteilung und Weibullverteilung getestet werden. Für die eine Stichprobe lassen sich somit zwei Bestimmtheitsmaße berechnen. Aus deren Vergleich kann entschieden werden, welche Verteilungsfunktion das Zufallsexperiment besser beschreibt.

Im Wahrscheinlichkeitspapier kann die in der Betriebsfestigkeit häufig verwendete Streuspanne T , die ein Maß für die Streuung der Beobachtung ist, einfach interpretiert werden, **Abbildung 3.8**. Die Streuspanne wird allgemein als der Quotient aus dem 90 %-Quantil und den 10 %-Quantil definiert, Gleichung (3.16).

$$T = \frac{90\% - \text{Quantil}}{10\% - \text{Quantil}} \quad (3.16)$$

Abbildung 3.8 ist ebenfalls zu entnehmen, dass das 10 % bzw. das 90 %-Quantil um Faktor \sqrt{T} vom 50 %-Quantil entfernt sind.

Liegt eine logarithmische Normalverteilung mit logarithmischer Standardabweichung $s_{\log,N}$ vor, dann existiert zwischen Streuspanne T und logarithmischer Standardabweichung $s_{\log,N}$ ein einfacher Zusammenhang.

$$T = 10^{2,56 \cdot s_{\log,N}} \quad (3.17)$$

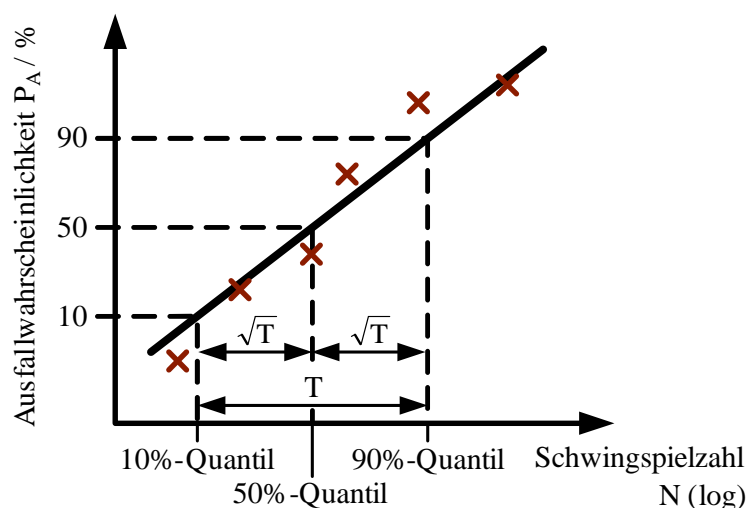


Abbildung 3.8: Darstellung der Streuspanne T im Wahrscheinlichkeitspapier

3.3.2 Shapiro-Wilk-Test

Mit dem Wahrscheinlichkeitspapier, Kapitel 3.3.1, existiert eine anschauliche, grafische Möglichkeit, mit der es gelingt, eine Stichprobe auf ihre zugehörige Grundgesamtheit zu überprüfen. Mit dem Bestimmtheitsmaß steht auch ein rechnerisches Gütekriterium zur Verfügung.

Insbesondere für die Normalverteilung und damit auch für die logarithmische Normalverteilung existieren weitere Testverfahren, [Fahr 07], [Hart 09] und [Sach 06]. Der Shapiro-Wilk-Test, [Shap 65], besitzt dabei die größte Trennungskraft, [Sach 06], weshalb er hier am Beispiel der logarithmischen Normalverteilung näher erläutert wird.

Wie für nahezu alle Testverfahren sind eine Nullhypothese H_0 und eine Gegenhypothese H_1 aufzustellen, hier:

- Nullhypothese H_0 : Die Stichprobe entstammt einer logarithmischen Normalverteilung
- Gegenhypothese H_1 : Die Stichprobe entstammt keiner logarithmischen Normalverteilung

Anschließend ist auf Basis der Stichprobe vom Stichprobenumfang n eine Testgröße W zu berechnen. Im Shapiro-Wilk-Test ist die Testgröße W ein Quotient, Gleichung (3.18). Im Nenner wird die denormierte Stichprobenvarianz mit der bekannten Gleichung berechnet. Im Zähler erfolgt eine Bestimmung der denormierten Stichprobenvarianz mit Hilfe der Ordnungsstatistik unter Ausnutzung der Eigenschaften einer logarithmischen Normalverteilung. Zähler und Nenner streben gegen eine Übereinstimmung ($W = 1$), wenn die Stichprobe einer logarithmisch-normalverteilten Grundgesamtheit entstammt.

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \lg(N_i))^2}{\sum_{i=1}^n (\lg(N_i) - \lg(N_{50\%,SP}))^2} \quad (3.18)$$

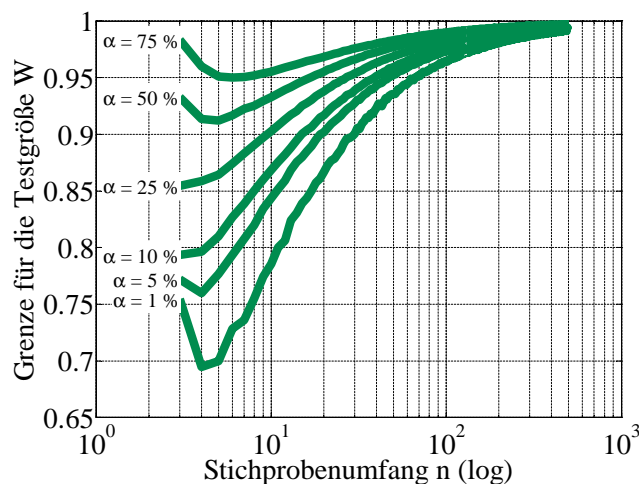


Abbildung 3.9: Grenzen der Testgröße W des Shapiro-Wilk-Tests in Abhängigkeit des Signifikanzniveaus α , generiert aus Monte-Carlo-Simulationen, in Anlehnung an [Shap 65]

Zur Berechnung der Testgröße W wird die der Größe nach aufsteigend geordnete Stichprobe mit Gewichten a multipliziert und anschließend auf ihre denormierte Stichprobenvarianz bezogen. Für Stichprobenumfänge bis $n = 50$ sind die Gewichte a in [Shap 65] tabelliert. Für größere Stichprobenumfänge sind in [Shap 65] Näherungsgleichungen für deren Berechnung angegeben.

Da die Stichproben Zufallsgrößen sind, ist die Testgröße W auch wieder eine Zufallsgröße. Somit können für die Testgröße W , die sich für logarithmisch-normalverteilte Grundgesamtheiten ergibt, Quantile α angegeben werden, die sogenannten Signifikanzniveaus, **Abbildung 3.9**. Typische Signifikanzniveaus liegen zwischen $1\% \leq \alpha \leq 10\%$, [Fahr 07]. Das Signifikanzniveau gibt die Wahrscheinlichkeit an, einen Fehler 1. Art zu begehen. Das bedeutet, dass die Nullhypothese H_0 aufgrund der Stichprobe verworfen wird, obwohl sie zutreffend ist. Anders formuliert: Liegt die für eine Stichprobe berechnete Testgröße W unterhalb der durch das Signifikanzniveau α vorgegebenen Grenze, **Abbildung 3.9**, dann wird die Nullhypothese zugunsten der Gegenhypothese verworfen. Die Grenzen für unterschiedliche Signifikanzniveaus können bis zum Stichprobenumfang $n = 50$ [Shap 65] entnommen werden. Für größere Stichprobenumfänge lassen sich die Grenzen mit Monte-Carlo-Simulationen berechnen, vgl. Kapitel 3.4.

Beispiel:

Zur Verdeutlichung der Vorgehensweise im Shapiro-Wilk-Test sei das nachfolgend beschriebene Beispiel betrachtet. Aus einem Lebensdauerversuch wurden auf einem Lashorizont die folgenden Schwingspielzahlen ermittelt: $N_1 = 151039$, $N_2 = 183255$, $N_3 = 59136$, $N_4 = 187227$ und $N_5 = 116848$. Die zu prüfende Nullhypothese H_0 lautet: Die Stichprobe entstammt einer logarithmischen Normalverteilung. Als Signifikanzniveau soll $\alpha = 5\%$ verwendet werden.

Als erstes ist die Stichprobe der Größe nach zu ordnen:

$N_1 = 59136$, $N_2 = 116848$, $N_3 = 151039$, $N_4 = 183255$ und $N_5 = 187227$

[Shap 65] werden die fünf Gewichte a_i entnommen:

$a_1 = -0.6646$, $a_2 = -0.2413$, $a_3 = 0.0000$, $a_4 = 0.2413$ und $a_5 = 0.6646$

Damit kann die Testgröße W berechnet werden:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \lg(N_i))^2}{\sum_{i=1}^n (\lg(N_i) - \lg(N_{50\%,SP}))^2} = \frac{0.1442}{0.1707} = 0.8448 \quad (3.19)$$

Nach [Shap 65] ergibt sich für einen Stichprobenumfang von $n = 5$ und ein Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ die Grenze der Testgröße zu $W_{\text{Grenz}} = 0.762$, vgl. auch **Abbildung 3.9**. Da $W = 0.8448 \gg W_{\text{Grenz}} = 0.762$ wird die Nullhypothese in diesem Beispiel beibehalten.

3.4 Monte-Carlo-Simulationen

Das Durchführen eines Zufallsexperiments mittels Monte-Carlo-Simulation entspricht dem Ziehen einer Stichprobe aus der vorgegebenen Grundgesamtheit. Für jede gezogene Stichprobe können relevante Parameter wie z.B. der logarithmische Mittelwert berechnet werden. Da für die Simulation die Grundgesamtheit vorgegeben wird, lassen sich die Parameter der Stichprobe auf die der Grundgesamtheit beziehen. Damit wird z.B. eine Bewertung von Schätzfunktionen oder ganzer Verfahren, wie z.B. dem Perlenschnurverfahren, Kapitel 4.2.1, möglich.

Monte-Carlo-Simulationen sind Simulationen, bei denen Zufallszahlen zur Berechnung zum Einsatz kommen, [Behr 13]. Grundlage sind gleichverteilte Zufallszahlen, die auf ein stochastisches Modell angewendet werden, [Henz 13]. Das bedeutet, dass die Grundgesamtheit vorzugeben ist.

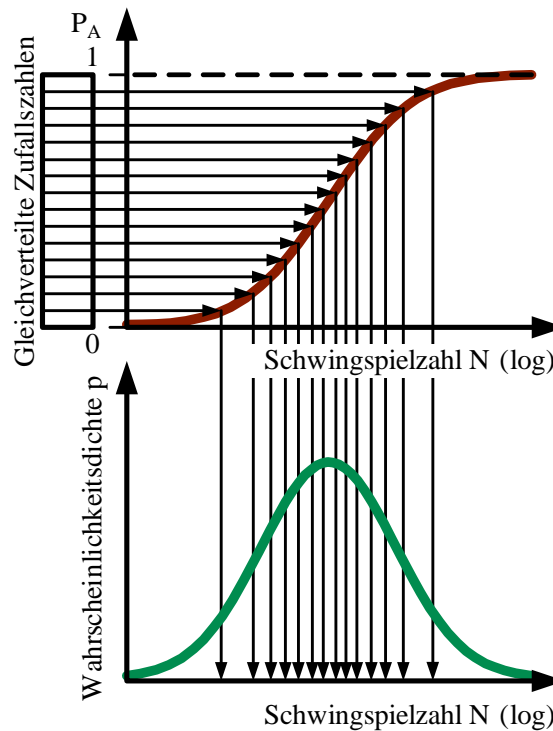


Abbildung 3.10: Generieren von Zufallszahlen mit der Inversionsmethode

Die mit Rechnertechnik erzeugten Zufallszahlen sind keine echten Zufallszahlen, sondern Pseudozufallszahlen. Sie entstammen einer Zahlenfolge mit möglichst großer Periodenlänge. Je größer die Periodenlänge, desto ähnlicher sind die Pseudozufallszahlen echten Zufallszahlen, [Henz 13]. Ein Zufallsgenerator mit einer sehr großen Periodenlänge ist der Mersenne-Twister, [Mats 98]. Der Mersenne-Twister ist in der MatLab-Umgebung verfügbar und wird in der vorliegenden Arbeit verwendet.

Mit Hilfe der Inversionsmethode, [Devr 96], können gleichverteilte Zufallszahlen auf dem Intervall $[0;1]$ in Zufallszahlen beliebiger Verteilungen umgewandelt werden. Voraussetzung ist, dass die inverse Verteilungsfunktion der gewünschten Grundgesamtheit vorliegt, **Abbildung 3.10**. Dazu werden gleichverteilte Zufallszahlen auf dem Intervall $[0;1]$ in das Argument der inversen

Verteilungsfunktion geschrieben. Die inverse Verteilungsfunktion rechnet die gleichverteilten Zufallszahlen um in Zufallszahlen der gewünschten Verteilung, **Abbildung 3.10**.

Bei den Monte-Carlo-Simulationen handelt es sich um Zufallsexperimente. Daher ist es entscheidend, das Experiment ausreichend oft zu wiederholen, **Abbildung 3.11**. Durch die Wiederholungen lassen sich statistisch abgesicherte Aussagen aus den Simulationsergebnissen ableiten (Gesetz der großen Zahlen), [Behr 13].

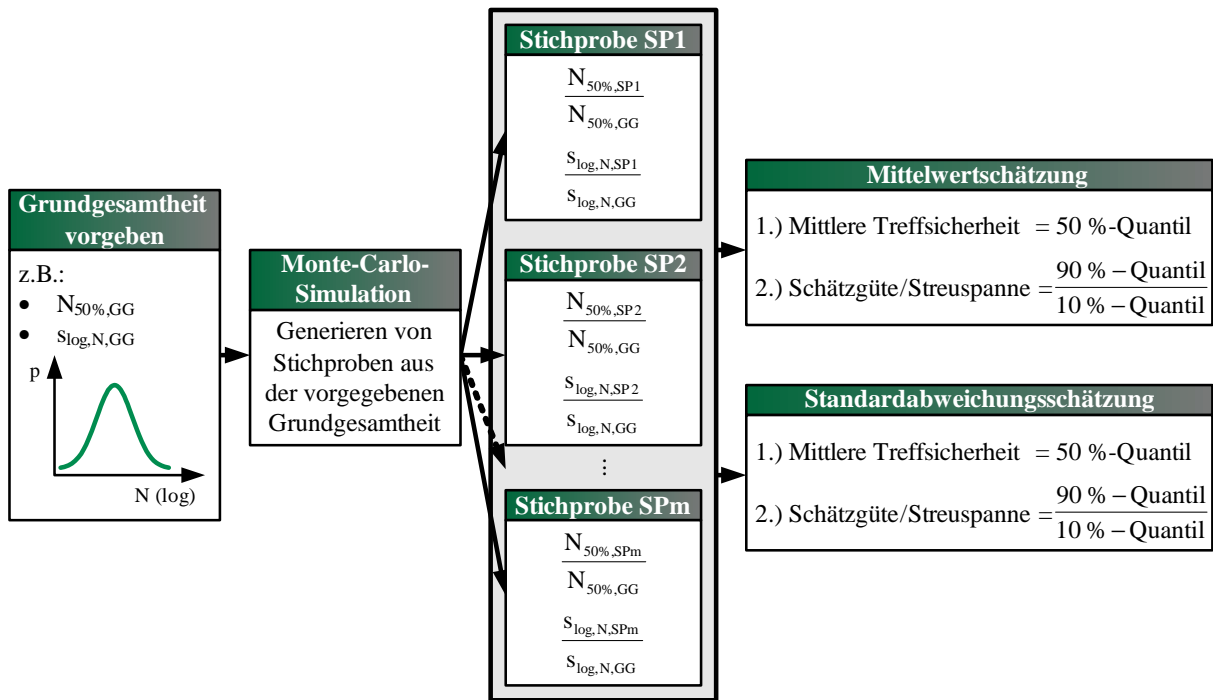


Abbildung 3.11: Beispiel für eine Monte-Carlo-Simulation mit logarithmisch-normalverteilten Zufallszahlen und anschließender Bewertung der Mittelwert- und Standardabweichungsschätzung

In der vorliegenden Arbeit wird die Bewertung anhand der sogenannten mittleren Treffsicherheit und der sogenannten Schätzgüte vorgenommen. Unter der mittleren Treffsicherheit ist das 50 %-Quantil des auf die Grundgesamtheit bezogenen Parameters zu verstehen, **Abbildung 3.11**. Anders formuliert: Beträgt die mittlere Treffsicherheit den Wert Eins, dann wird der zugehörige Parameter der Grundgesamtheit zu gleichen Teilen über- bzw. unterschätzt.

Der Begriff Schätzgüte bezeichnet die Streuspanne des auf die Grundgesamtheit bezogenen Parameters, **Abbildung 3.11**. Ist die Streuspanne nahe Eins, dann gilt sie als gut, da sich ein Großteil der Ergebnisse nicht wesentlich unterscheidet. Anders formuliert: Bei einer hohen Schätzgüte weichen die Einzelergebnisse nur gering von der mittleren Treffsicherheit ab.

Das 10 %, das 50 %- und das 90 %-Quantil werden aus den auf die Grundgesamtheit bezogenen Simulationsdaten wie nachfolgend beschrieben ermittelt. Die auf die Grundgesamtheit bezogenen Mittelwerte bzw. Standardabweichungen werden der Größe nach aufsteigend geordnet. Jedem bezogenen Mittelwert bzw. jeder bezogenen Standardabweichung der geordneten Stichprobe kann mit Hilfe der Ordnungsstatistik eine Auftretenswahrscheinlichkeit zugewiesen werden.

Die geordnete Stichprobe besteht jetzt aus Wertepaaren (bezogener Simulationswert / Auftretenswahrscheinlichkeit). Mit den Wertepaaren lässt sich das gewünschte Quantil ablesen. Ist das gewünschte Quantil nicht exakt vorhanden, dann wird es durch lineare Interpolation aus den beiden angrenzenden abgeschätzt. Dieses Vorgehen entspricht dem Befehl `quantile` in der MatLab-Umgebung.

4 Verfahren zur Ermittlung der Wöhlerlinie

4.1 Grundlegendes zur Wöhlerlinie

Metallische Bauteile weisen bei ausreichend hoher, zeitlich veränderlicher Beanspruchung eine endliche Lebensdauer auf. Grund dafür sind im Werkstoff auftretende plastische Verformungen, die zur Ermüdung führen. Besitzt die Beanspruchung eine über der Zeit konstante Spannungsamplitude S_a und eine konstante Mittelspannung S_m wird von einer einstufigen Beanspruchung oder einem Wöhlerversuch gesprochen. Die sich ergebenden Schwingspielzahlen N bis zum Versagen werden in Kombination mit den zugehörigen Spannungsamplituden S_a im sogenannten Wöhlerdiagramm dargestellt, **Abbildung 4.1**. Als Versagenskriterium findet in der Regel Anriss oder Bruch Verwendung. Im Folgenden wird stellvertretend von Brüchen gesprochen. Der sich im Wöhlerdiagramm ergebende Kurvenzug wird als Wöhlerlinie bezeichnet, [Gude 99]. Alternativ zur Spannungsamplitude können auf der Ordinate auch gleichbedeutende Größen wie Kräfte, Momente oder Drücke aufgetragen werden. Hier wird im Folgenden stellvertretend nur die Spannungsamplitude betrachtet.

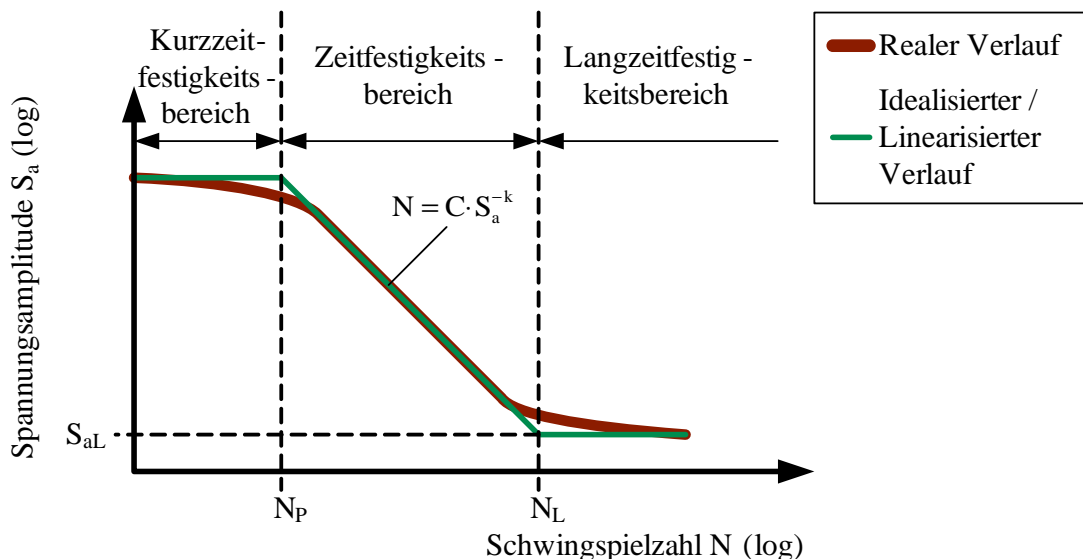


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung einer Wöhlerlinie mit realem und idealisiertem Verlauf

In der üblichen, doppeltlogarithmischen Darstellung der Wöhlerlinie, **Abbildung 4.1**, lassen sich in der Regel drei charakteristische Bereiche erkennen, [Sand 08]:

1. Kurzzeitfestigkeit
2. Zeitfestigkeit
3. Langzeitfestigkeit

Häufig wird nicht der reale, sondern ein durch Geradenstücken idealisierter Verlauf der Wöhlerlinie verwendet, **Abbildung 4.1**. Unter Verwendung der Linearisierung lassen sich charakte-

ristische Schwingspielzahlen angeben. Bei der plastischen Knicklastschwingspielzahl N_P geht die Wöhlerlinie von einem nahezu horizontalem Verlauf in die sogenannte Zeitfestigkeitsgerade über. Im Zeitfestigkeitsgebiet zeigt sich eine deutliche Abnahme der ertragbaren Spannungsamplitude bei steigender Schwingspielzahl, bis die Wöhlerlinie bei der Ecklastschwingspielzahl N_L in den Langzeitfestigkeitsbereich übergeht. Je nach Werkstoff und Umgebungsbedingungen kann sich im Langzeitfestigkeitsgebiet ein horizontaler Verlauf oder ein weiterer Abfall der Festigkeit zeigen, [Gude 99] und [Sons 05]. Die plastische Knicklast- und die Ecklastschwingspielzahl besitzen keine festen Werte, [Rada 07]. Zur Orientierung kann [FKM 12] herangezogen werden. Für nichtgeschweißte Bauteile gilt dort: $N_P = 10^4$ und $N_L = 10^6$.

Zur Beschreibung des Zeitfestigkeitsbereichs existieren zahlreiche Ansätze, [Haib 06]. Am häufigsten findet die Gleichung nach [Basq 10] Verwendung, die mit Lage C und Neigung k im doppeltlogarithmischen einen linearen Zusammenhang zwischen Spannungsamplitude S_a und Schwingspielzahl N herstellt, Gleichung (4.1).

$$N = C \cdot S_a^{-k} \quad (4.1)$$

Die Neigung k ist abhängig vom Werkstoff und der Bauteilgeometrie, [Rada 07]. Typische Neigungen liegen zwischen $3 \leq k \leq 15$, [ABF 11]. Im Falle nichtgeschweißter Bauteile wird in [FKM 12] ohne Berücksichtigung der Bauteilgeometrie für Normalspannungswöhlerlinien $k = 5$ und für Schubspannungswöhlerlinien $k = 8$ gesetzt.

Schwingfestigkeitsversuche sind sowohl in Last als auch in Lebensdauerrichtung Streuungen unterlegen. Detaillierte Untersuchungen zur Streuung der Schwingfestigkeit finden sich in [Aden 01]. Typische logarithmische Standardabweichungen betragen, [Aden 01]:

- Lebensdauerrichtung: $0,10 \leq s_{\log,N} \leq 0,30$
- Lastrichtung: $0,02 \leq s_{\log,S} \leq 0,05$

Wöhlerlinien können experimentell bestimmt oder mit Hilfe rechnerischer Verfahren abgeschätzt werden. Wobei den experimentellen Verfahren immer der Vorzug zu geben ist. Bei den experimentellen Verfahren wird dabei in Verfahren zur Bestimmung des Kurzzeitfestigkeits-, des Zeitfestigkeits- und des Langzeitfestigkeitsbereichs unterschieden. Die Verfahren im Kurzzeitfestigkeitsbereich werden hier nicht betrachtet. Für die nachfolgend vorgestellten Verfahren gilt die exemplarische Annahme, dass die Versuchsergebnisse einer logarithmischen Normalverteilung folgen. In Kapitel 5 wird gezeigt, dass die Annahme einer logarithmischen Normalverteilung für Schwingfestigkeitsversuche in der Regel zutreffend ist.

4.2 Experimentelle Verfahren im Zeitfestigkeitsgebiet

4.2.1 Perlenschnurverfahren

Bei Einsatz des Perlenschnurverfahrens werden Proben auf mehreren Lasthorizonten im Zeitfestigkeitsgebiet bis zu einem Ausfallkriterium (z.B. Anriss oder Bruch) geprüft. Ordnen sich die ermittelten Lebensdauern bei doppeltlogarithmischer Darstellung entlang einer Geraden an, dann kann die Wöhlerlinie mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 50\%$ durch lineare Regression, [Fahr 09], bestimmt werden, [FVA 304]. Die Minimierung der Fehlerquadrate hat dabei in Richtung der Schwingspielzahl über alle Versuchspunkte (Anriss/Bruch) im Zeitfestigkeitsgebiet zu erfolgen, [Mart 11a]. Eventuelle Versuchsabbrüche dürfen nicht mit in die Auswertung einbezogen werden.

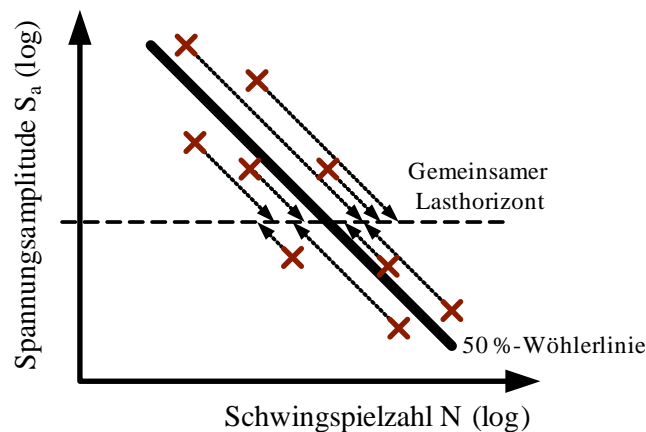


Abbildung 4.2: Anwendung des Perlenschnurverfahrens im Zeitfestigkeitsbereich

Die lineare Regression liefert die Zeitfestigkeitsgerade für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 50\%$. Sollen andere Ausfallwahrscheinlichkeiten angegeben werden, dann muss die logarithmische Standardabweichung der Stichprobe $s_{\log,N,SP}$ bekannt sein. Dazu werden die Versuchspunkte parallel zur 50 %-Wöhlerlinie auf einen beliebigen, gemeinsamen Lasthorizont verschoben, **Abbildung 4.2**. Auf dem gemeinsamen Lasthorizont lässt sich die logarithmische Standardabweichung nach Gleichung (3.11) berechnen, [Mart 11b]. Das Perlenschnurverfahren trifft damit die Annahme, dass die Streuung über den gesamten Zeitfestigkeitsbereich konstant ist, [FVA 304].

Bei der Platzierung der Lasthorizonte ist der Zeitfestigkeitsbereich möglichst weit auszuschöpfen. Prüflinge nahe den Übergangsbereichen liefern die aussagekräftigsten Beiträge zur Schätzung der Zeitfestigkeitsgeraden. Lässt sich aus dem Prüfergebnis erkennen, dass einzelne Versuche versehentlich in den Übergangsbereichen platziert wurden (Abweichungen von der Geraden), dann sind diese von der Auswertung auszuschließen. Liegen keinerlei Erfahrungen vor, dann ist die Prüfung im Zeitfestigkeitsgebiet nach dem Perlenschnurverfahren zu organisieren, da fehlerhaft platzierte Versuche eher erkannt werden, [Mart 11a].

4.2.2 Horizontenverfahren

Erfolgen die Versuche im Zeitfestigkeitsgebiet nach dem Horizontenverfahren, wird jeweils eine erhöhte Anzahl an Proben auf ausgesuchten Lasthorizonten bis zum Ausfall geprüft, **Abbildung 4.3**. Häufig werden zwei Lasthorizonte verwendet, **Abbildung 4.3**. Auf jedem Lasthorizont lassen sich der logarithmische Mittelwert, Gleichung (3.8) und Gleichung (3.9), sowie die logarithmische Standardabweichung, Gleichung (3.10), der Stichprobe berechnen, [FVA 304], [Mart 11a] und [Mart 11b].

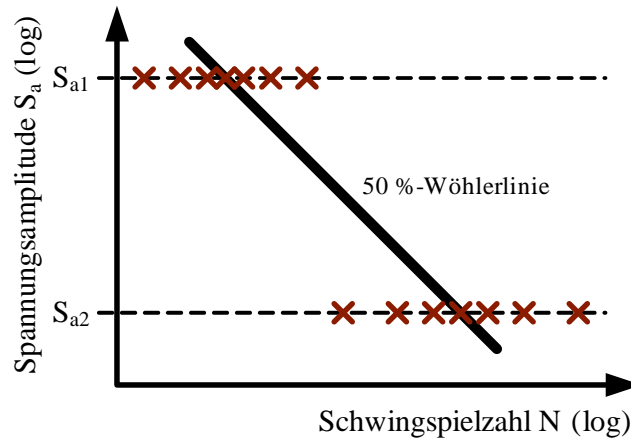


Abbildung 4.3: Anwendung des Horizontenverfahrens im Zeitfestigkeitsbereich

Da für jeden Lasthorizont eine separate, logarithmische Standardabweichung ausgewiesen wird, sind die Lebensdauern für unterschiedliche Ausfallwahrscheinlichkeiten je Horizont zu berechnen. Zu jeder Ausfallwahrscheinlichkeit lässt sich damit eine eigene Geradengleichung nach [Basq 10], Gleichung (4.1), berechnen. Im Gegensatz zum Perlenschnurverfahren, Kapitel 4.2.1, ergeben sich damit im Allgemeinen Wöhlerlinien mit unterschiedlichen Neigungen für die einzelnen Ausfallwahrscheinlichkeiten.

Wie auch beim Perlenschnurverfahren sollten die Lasthorizonte möglichst nahe zu den Übergangsbereichen platziert werden, da bei festem Stichprobenumfang so belastbarere Ergebnisse erzielbar sind. Die Platzierung der Horizonte gestaltet sich im Horizontenverfahren ohne Erfahrungen über die Wöhlerlinie schwierig. Lasthorizonte werden eventuell in den Übergangsbereichen platziert, ohne dass dies bemerkt wird. Die Wöhlerlinie wird dann tendenziell zu flach geschätzt, [Mart 11a].

4.3 Experimentelle Verfahren im Langzeitfestigkeitsgebiet

Metallische Werkstoffe können eine ausgeprägte Langzeitfestigkeit aufweisen. Die Wöhlerlinie verläuft im Langzeitfestigkeitsgebiet in diesem Fall horizontal, [Gude 99]. Abhängig von Bauteilgeometrie und Beanspruchungsart ergibt sich für einige Werkstoffe auch im Langzeitfestigkeitsgebiet ein kontinuierlicher Abfall, [Sons 05]. Eine ausgeprägte Langzeitfestigkeit ist daher nicht immer vorhanden. Die Bestimmung einer ertragbaren Amplitude in Abhängigkeit einer definierten Schwingspielzahl ist hingegen immer möglich. Daher soll im Folgenden unter dem Begriff Langzeitfestigkeit die bei einer vom Versuchsingenieur festgelegten Schwingspielzahl ertragbare Amplitude verstanden werden.

Im Langzeitfestigkeitsgebiet ergibt sich im Gegensatz zum Zeitfestigkeitsgebiet nicht immer ein Ausfall. Die Versuche werden aus Zeit- und Kostengründen nach dem Erreichen einer Abbruchschwingspielzahl beendet, sogenannte Durchläufer. Die ermittelten Langzeitfestigkeiten gelten für die gewählte Abbruchschwingspielzahl.

Nachfolgend werden die häufig zitierten Verfahren Treppenstufenverfahren, [Dixo 48], mit verschiedenen Auswertemethoden, Abgrenzungsverfahren, [Maen 77], kombiniertes Verfahren nach Klubberg, [Klub 95], und Probitverfahren, [Finn 47], vorgestellt. Auf das Locativerfahren, [Loca 55], und das Verfahren nach Prot, [Prot 48], wird verzichtet, da mit diesen Verfahren keine Streuparameter geschätzt werden können.

4.3.1 Treppenstufenverfahren

Beim Treppenstufenverfahren werden im Bereich der geschätzten Langzeitfestigkeit logarithmisch äquidistante Lasthorizonte (konstante Faktoren) festgelegt, **Abbildung 4.4**. Der Abstand wird als Stufensprung d bezeichnet. Die erste Probe kann auf einem beliebigen Lasthorizont eingesetzt werden. Das Prüfergebnis der vorangegangenen Probe legt den Lasthorizont der nachfolgenden Probe fest, **Abbildung 4.4**. Ist die vorangegangene Probe ein Bruch, wird der Prüflasthorizont für die nachfolgende Probe ein Lastniveau tiefer gewählt, **Abbildung 4.4**. Handelt es sich um einen Durchläufer, wird die Folgeprobe auf dem nächsthöheren Lasthorizont geprüft, [Dixo 48]. Die sich einstellende Verkettung von Versuchspunkten wird als Treppenstufenfolge bezeichnet.

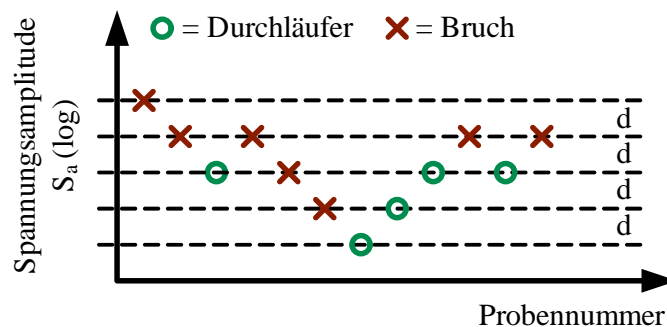


Abbildung 4.4: Prinzipieller Ablauf eines Treppenstufenversuchs

Zur Auswertung von Treppenstufenfolgen existieren zahlreiche Methoden, z.B. [Deub 74], [Dixo 48], [Hück 83] und [Liu 01]. Im Nachfolgenden werden ausgewählte Methoden vorgestellt.

4.3.1.1 Auswertung nach Dixon-Mood

Dixon und Mood, [Dixo 48], schlagen ein Auswertemethode für Treppenstufenfolgen vor, die den Median $S_{aL,50\%,SP}$ und die logarithmische Standardabweichung $s_{log,S,SP}$ der Treppenstufenfolge schätzt. Im Fall der vorausgesetzten, logarithmischen Normalverteilung sind Median und logarithmischer Mittelwert gleichbedeutend. Bei der Versuchsführung sollte der Logarithmus des Stufensprungs d in etwa der logarithmischen Standardabweichung $s_{log,S,GG}$ der Grundgesamtheit entsprechen.

Die Treppenstufenfolge wird zunächst auf das weniger oft eintretende Ereignis analysiert. Nur das weniger oft eingetretene Ereignis wird in der Auswertung verwendet. Im Beispiel aus **Abbildung 4.5** treten mehr Brüche als Durchläufer auf. Die Laststufen mit dem weniger oft eingetretenen Ereignis werden mit $i = 0$ beginnend aufsteigend nummeriert, **Abbildung 4.5**. Durch die Betrachtung des weniger oft eingetretenen Ereignisses wird die Treppenstufenfolge automatisch um einen möglichen Anschnitt bereinigt.

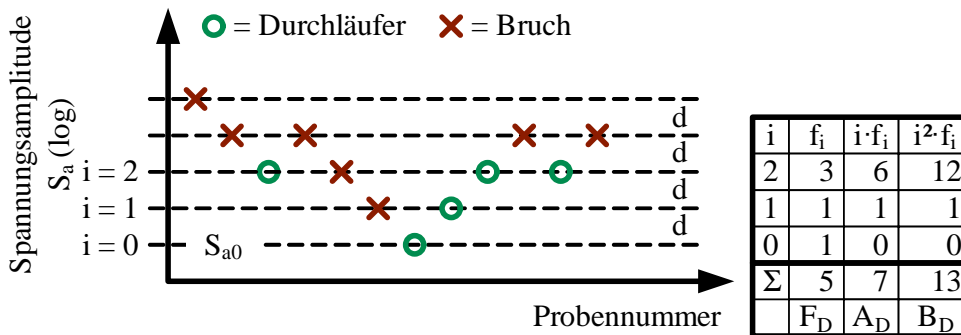


Abbildung 4.5: Auswertung einer Treppenstufenfolge nach Dixon-Mood mit dem weniger oft eingetretenen Ereignis (hier Durchläufer)

Auf den wertbaren Laststufen kann die Anzahl der wertbaren Ereignisse f_i ermittelt werden, **Abbildung 4.5**. Die Anzahl der wertbaren Ereignisse werden zu den Hilfsgrößen F_D , A_D und B_D verrechnet.

$$F_D = \sum_{i=0}^{i_{max}} f_i \tag{4.2}$$

$$A_D = \sum_{i=0}^{i_{max}} i \cdot f_i \tag{4.3}$$

$$B_D = \sum_{i=0}^{i_{max}} i^2 \cdot f_i \tag{4.4}$$

Mit den Hilfsgrößen lassen sich der Median $S_{aL,50\%,SP}$ und die logarithmische Standardabweichung $s_{\log,S,SP}$ unter Verwendung des untersten, wertbaren Lashorizonts S_{a0} berechnen.

$$\lg(S_{aL,50\%,SP}) = \lg(S_{a0}) + \lg(d) \left(\frac{A_D}{F_D} - \frac{1}{2} \right), \text{ falls Brüche gewertet} \quad (4.5)$$

$$\lg(S_{aL,50\%,SP}) = \lg(S_{a0}) + \lg(d) \left(\frac{A_D}{F_D} + \frac{1}{2} \right), \text{ falls Durchläufer gewertet} \quad (4.6)$$

$$S_{aL,50\%,SP} = 10^{\lg(S_{aL,50\%,SP})} \quad (4.7)$$

$$s_{\log,S,SP} = 1.620 \cdot \lg(d) \cdot \left(\frac{F_D \cdot B_D - A_D^2}{F_D^2} + 0.029 \right), \text{ falls } \frac{F_D \cdot B_D - A_D^2}{F_D^2} > 0.3 \quad (4.8)$$

Wenn die Anwendbarkeitsbedingung in Gleichung (4.8) verletzt ist, muss die logarithmische Standardabweichung $s_{\log,S,SP}$ mit der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden, [Dixo 48], siehe auch Kapitel 4.3.1.3. [Dixo 48] geben auch vor, dass eine Auswertung nach Maximum-Likelihood vorzunehmen ist, wenn der Logarithmus des Stufensprungs d mehr als das Doppelte der logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,S,GG}$ beträgt. Da die Grundgesamtheit in der Regel unbekannt ist, kann diese Anwendbarkeitsgrenze meist nicht überprüft werden.

4.3.1.2 Auswertung nach der IABG-Methode

Die IABG-Methode, [Hück 83], ist eine Erweiterung der Methode nach Dixon-Mood, [Dixo 48]. Sie ist hauptsächlich durch die Anwendungsgrenzen der Methode nach Dixon-Mood, Gleichung (4.8), und dessen nicht-erwartungstreuer Standardabweichungsschätzung motiviert. Im Gegensatz zur Methode nach Dixon-Mood unterscheidet die IABG-Methode nicht zwischen Bruch und Durchläufer. Sie bezieht beide Ereignisse in die Auswertung mit ein.

Die Treppenstufenfolge wird zunächst einer Aufbereitung unterzogen. Dabei werden Versuche zu Beginn der Treppenstufenfolge, sogenannter Anschnitt, auf Spannungshorizonten, die im weiteren Verlauf der Treppenstufenfolge nicht noch einmal bestätigt werden, nicht gewertet, **Abbildung 4.6**. Weiterhin kann der Treppenstufenfolge ein fiktiver Versuch hinzugefügt werden, **Abbildung 4.6**, da die IABG-Methode nicht zwischen Bruch und Durchläufer unterscheidet. Die Position des fiktiven Versuchs ergibt sich allein aus der Versuchsvorschrift für einen Treppenstufenversuch, **Abbildung 4.6**.

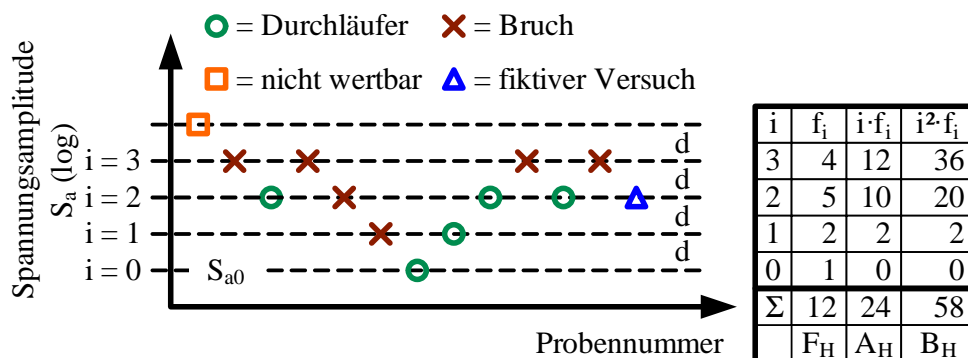


Abbildung 4.6: Auswertung einer Treppenstufenfolge nach der IABG-Methode

Die wertbaren Laststufen sind beginnend mit $i = 0$ aufsteigend zu nummerieren, **Abbildung 4.6**. Auf jeder auswertbaren Laststufe werden die Anzahl der Proben f_i bestimmt und zu Hilfsgrößen F_H , A_H und B_H verrechnet.

$$F_H = \sum_{i=0}^{i_{\max}} f_i \quad (4.9)$$

$$A_H = \sum_{i=0}^{i_{\max}} i \cdot f_i \quad (4.10)$$

$$B_H = \sum_{i=0}^{i_{\max}} i^2 \cdot f_i \quad (4.11)$$

Mit Gleichung (4.9) und Gleichung (4.10), dem Stufensprung d und dem untersten, wertbaren Lasthorizont S_{a0} lässt sich der logarithmische Mittelwert $S_{aL,50\%,SP}$ berechnen.

$$\lg(S_{aL,50\%,SP}) = \lg(S_{a0}) + \lg(d) \cdot \frac{A_H}{F_H} \quad (4.12)$$

$$S_{aL,50\%,SP} = 10^{\lg(S_{aL,50\%,SP})} \quad (4.13)$$

Zur Bestimmung der logarithmischen Standardabweichung wird eine Hilfsvarianz k_H benötigt.

$$k_H = \frac{F_H \cdot B_H - A_H^2}{F_H^2} \quad (4.14)$$

Mit der Hilfsvarianz k_H wird die auf den Logarithmus des Stufensprungs d bezogene logarithmische Standardabweichung $s_{\log,S,SP}$ aus **Abbildung 4.7** abgelesen.

Mit dem Korrekturdiagramm, **Abbildung 4.7**, wird die logarithmische Standardabweichung $s_{\log,S,SP}$ erwartungstreu geschätzt, [Hück 83].

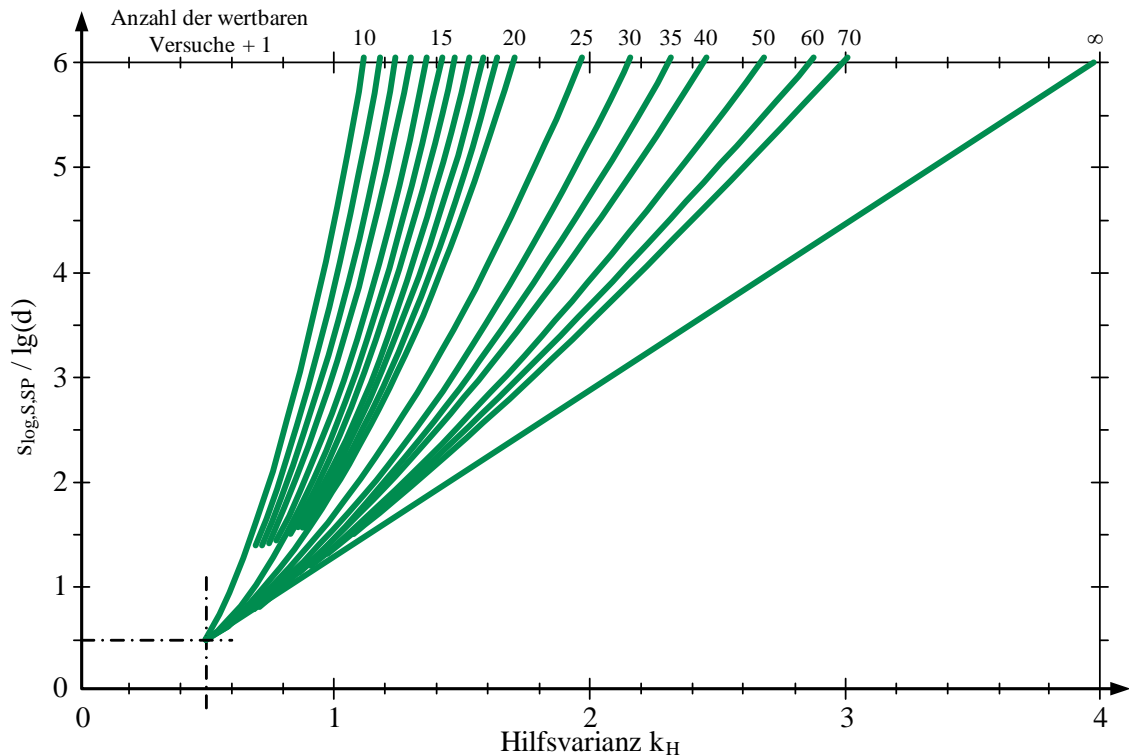


Abbildung 4.7: Erwartungstreue Schätzung der logarithmischen Standardabweichung mit der IABG-Methode, nachgezeichnet aus [Hück 83]

4.3.1.3 Auswertung nach Maximum-Likelihood

Die Maximum-Likelihood-Methode, [Dixo 48] und [Liu 01], bezieht alle Versuchsergebnisse in die Auswertung mit ein. Eine Aufbereitung der Treppenstufenfolge ist daher nicht erforderlich. Weiterhin ist das Verfahren auch anwendbar, wenn kein konstanter Stufensprung d vorliegt. Maximum-Likelihood schätzt die Parameter einer vorgegebene Wahrscheinlichkeitsfunktion so, dass ihre Übereinstimmungswahrscheinlichkeit mit der Treppenstufenfolge maximal wird, **Abbildung 4.8**.

Für jeden belegten Lasthorizont i , lässt sich für ein vorgegebenes Parameterpaar aus logarithmischem Mittelwert $S_{aL,50\%,SP}$ und logarithmischer Standardabweichung $s_{\log,S,SP}$ eine Ausfallwahrscheinlichkeit $P_{A,i}$ berechnen. Unter Einbeziehung der Anzahl Brüche $n_{B,i}$ und der Anzahl Durchläufer $n_{D,i}$ auf jedem Lasthorizont ergibt sich die Übereinstimmungswahrscheinlichkeit P mit der Treppenstufenfolge, [Liu 01].

$$P = \prod_{i=1}^{i_{\max}} P_{A,i}^{n_{B,i}} \cdot (1 - P_{A,i})^{n_{D,i}} \quad (4.15)$$

Die Verwendung der Maximum-Likelihood-Methode erfordert den Einsatz von Rechentechnik, um Gleichung (4.15) in vertretbarer Zeit zu maximieren. Das Maximieren von Gleichung (4.15) ist für heutige Rechner keine nennenswerte Herausforderung mehr.

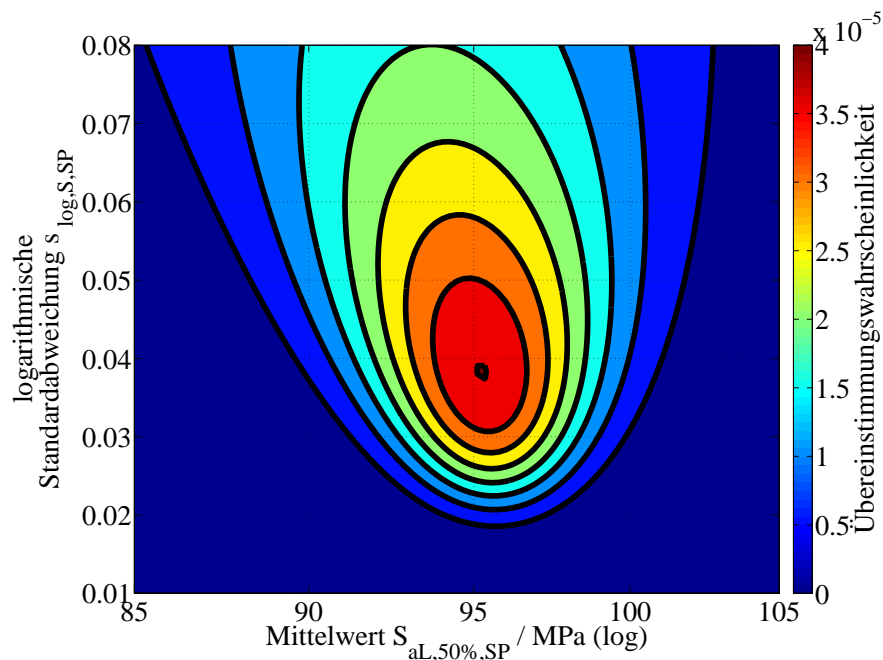


Abbildung 4.8: Übereinstimmungswahrscheinlichkeit verschiedener Schätzwerte des logarithmischen Mittelwerts und der logarithmische Standardabweichung mit einer Treppenstufenfolge, [Müll 14]

4.3.1.4 Auswertung nach Deubelbeiss

[Deub 74] schlägt eine Auswertung von Treppenstufenversuchen mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitspapiers vor, **Abbildung 4.9**. Für den Fall, dass der Stichprobenumfang $n \leq 25$ ist, werden die Versuchsergebnisse in Abhängigkeit ihres Lasthorizonts der Größe nach geordnet, **Abbildung 4.9**. Für jeden Versuchspunkt der geordneten Stichprobe kann mit einer Abschätzformel, Gleichung (4.16), eine Ausfallwahrscheinlichkeit P_A berechnet werden. Da jede Probe eine eigene Ausfallwahrscheinlichkeit erhält, kann es passieren, dass einem Lasthorizont unterschiedliche Ausfallwahrscheinlichkeiten zugewiesen werden, **Abbildung 4.9**.

$$P_A = \frac{1}{n} \cdot \left(i - 0,5 + \frac{n+1-2i}{8(n-1)} \right) \quad (4.16)$$

Ein Eintragen der Wertepaare aus Spannungsamplitude S_a und Ausfallwahrscheinlichkeit P_A liefert mit anschließender, linearer Regression den logarithmischen Mittelwert $S_{aL,50\%,SP}$ und die logarithmische Standardabweichung $s_{\log,S,SP}$ der Stichprobe, **Abbildung 4.9**.

Für Stichprobenumfänge $n > 25$ werden die Ausfallwahrscheinlichkeiten P_A nicht mehr mit Gleichung (4.16) bestimmt. Stattdessen sind die Versuchspunkte in ein Histogramm mit der Spannungsamplitude als Merkmal zu überführen. Für jede Klasse des Histogramms lässt sich eine Ausfallwahrscheinlichkeit P_A bestimmen. Zusammen mit der zugehörigen Klassenobergrenze wird ein Wahrscheinlichkeitspapier erhalten. Die lineare Regression liefert den logarithmischen Mittelwert $S_{aL,50\%,SP}$ und die logarithmische Standardabweichung $s_{\log,S,SP}$ der Stichprobe.

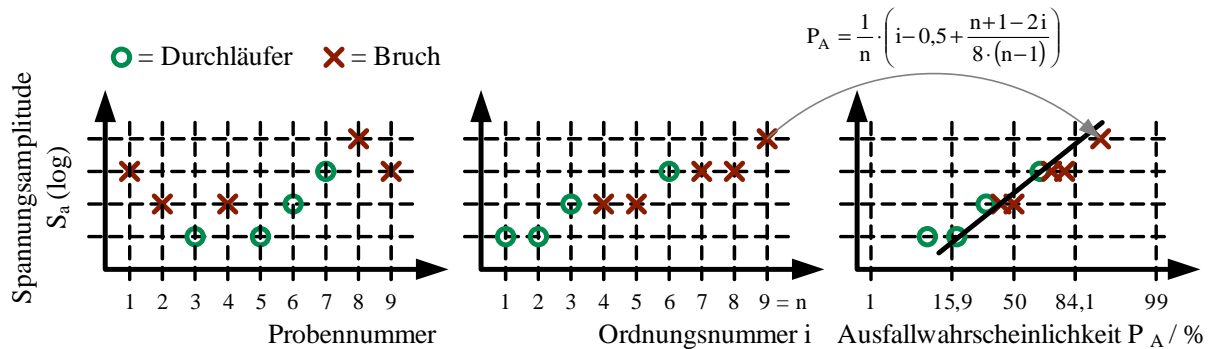


Abbildung 4.9: Auswertung einer Treppenstufenfolge nach Deubelbeiss für einen Stichprobenumfang $n \leq 25$

4.3.2 Abgrenzungsverfahren

Beim Abgrenzungsverfahren, [Maen 77], werden auf zwei Lasthorizonten im Langzeitfestigkeitsgebiet eine möglichst gleiche Anzahl an Proben untersucht, **Abbildung 4.10**. Auf beiden Lasthorizonten wird mit der Abschätzgleichung nach Rossow, [Ross 64], eine Ausfallwahrscheinlichkeit P_{Ai} in Abhängigkeit der Anzahl an Brüchen n_{Bi} und des Stichprobenumfangs n_i auf dem zugehörigen Lasthorizonts bestimmt.

$$P_{Ai} = \frac{3n_{Bi} - 1}{3n_i + 1} \quad (4.17)$$

Mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitspapiers können der logarithmische Mittelwert $S_{aL,50\%,SP}$ und die logarithmische Standardabweichung $s_{\log,S,SP}$ der Stichprobe abgelesen bzw. berechnet werden, **Abbildung 4.10**.

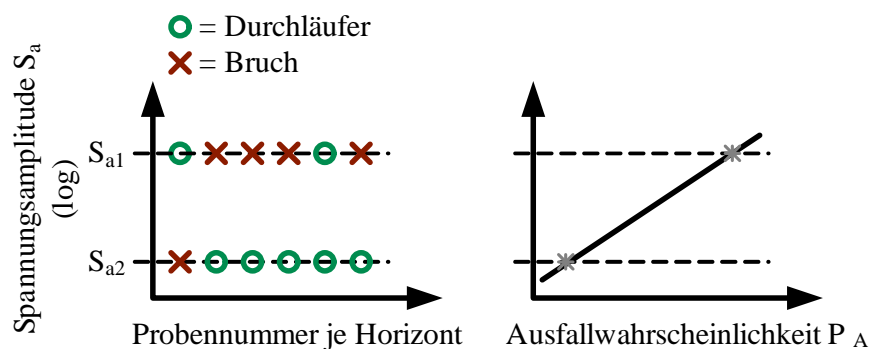


Abbildung 4.10: Auswertung eines Langzeitfestigkeitsversuchs nach dem Abgrenzungsverfahren

Zur Wahl der Lasthorizonte S_{a1} und S_{a2} schlägt [Maen 77] das nachfolgend beschriebene Verfahren vor, **Abbildung 4.11**. Die Langzeitfestigkeit wird so gut wie möglich geschätzt und auf diesem Horizont der erste Versuch angesetzt. Je nach vorliegendem Versuchsergebnis wird die Last solange gesenkt (Brüche) oder angehoben (Durchläufer), bis erstmalig das gegenteilige Ereignis eintritt. Dieser Lasthorizont ist der erste Prüfhorizont S_{a1} , **Abbildung 4.11**. Über die Wahl des Stufensprungs zur Auffindung des ersten Lasthorizonts wird in [Maen 77] keine Aussage getroffen.

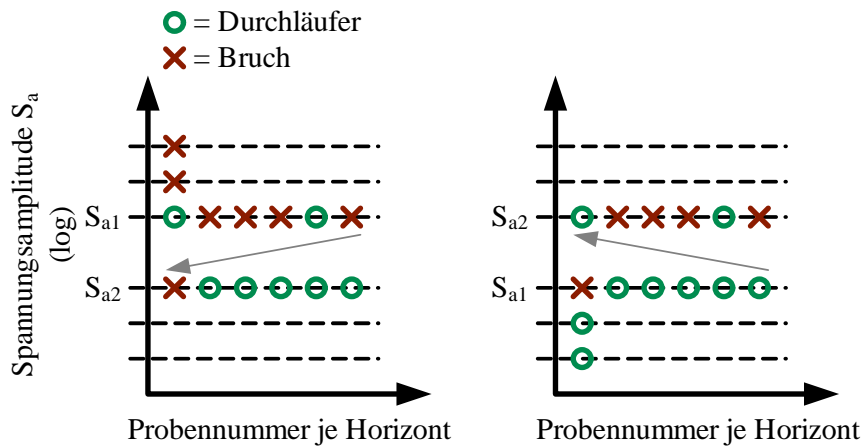


Abbildung 4.11: Verfahren zur Wahl der Versuchshorizonte beim Abgrenzungsverfahren, in Anlehnung an [Maen 77]

Je nachdem, ob auf dem ersten Prüfhorizont mehr Brüche oder mehr Durchläufer eingetreten sind, wird der zweite Prüfhorizont S_{a2} höher (mehr Durchläufer) oder niedriger (mehr Brüche) angesetzt, **Abbildung 4.11**.

Das in [Maen 77] gewählte Verfahren zur Abstandswahl zwischen den Lasthorizonten muss für den Fall einer logarithmischen Normalverteilung angepasst werden. In der vorliegenden Arbeit wird vorgeschlagen den Abstand in Abhängigkeit der vorab geschätzten, logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,S}$ und eines Verschiebungsfaktors x_{Abgr} zu wählen. Die vorab geschätzte, logarithmische Standardabweichung kann z.B. [Aden 01] entnommen werden oder aus Erfahrungen stammen.

$$\lg(S_{a2}) = \lg(S_{a1}) + \left(1 - \frac{n_{B1}}{n_1}\right) \cdot x_{Abgr} \cdot s_{\log,S}, \text{ falls } \frac{n_{B1}}{n_1} \leq 0,5 \text{ (mehr Durchläufer)} \quad (4.18)$$

$$\lg(S_{a2}) = \lg(S_{a1}) - \frac{n_{B1}}{n_1} \cdot x_{Abgr} \cdot s_{\log,S}, \text{ falls } \frac{n_{B1}}{n_1} > 0,5 \text{ (mehr Brüche)} \quad (4.19)$$

Der Verschiebungsfaktor x_{Abgr} ist zu optimieren, siehe Kapitel 7.2.

4.3.3 Kombiniertes Verfahren nach Klubberg

[Klub 95] stellt eine Kombination aus Treppenstufen- und Abgrenzungsverfahren vor, **Abbildung 4.12**. Aus einem Treppenstufenversuch wird der logarithmische Mittelwert $S_{aL,50\%,SP}$ unter Anwendung einer beliebigen Auswertemethode bestimmt, z.B. mit [Hück 83].

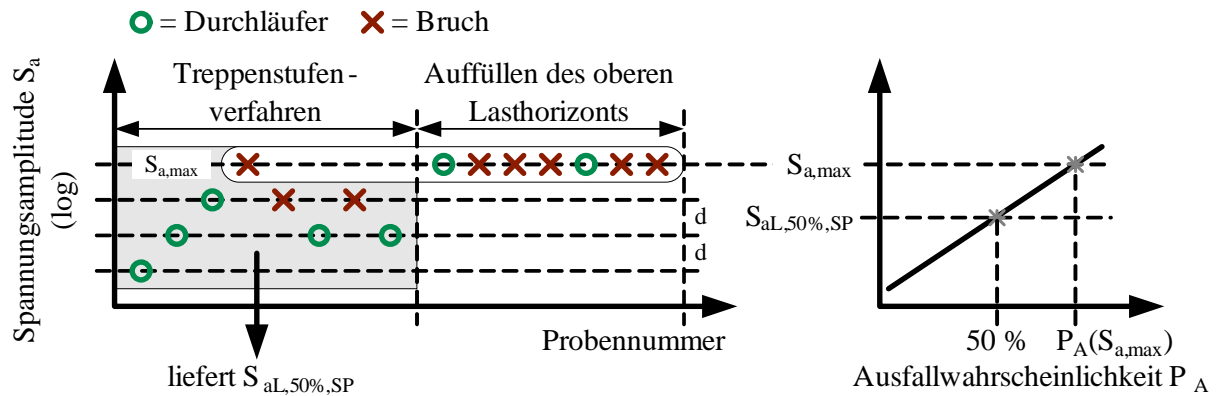


Abbildung 4.12: Kombiniertes Verfahren nach [Klub 95] zur experimentellen Bestimmung der Langzeitfestigkeit, [Müll 14]

Der oberste Lasthorizont $S_{a,max}$ der Treppenstufenfolge ist anschließend mit weiteren Versuchen aufzufüllen, **Abbildung 4.12**. Alternativ kann auch der unterste Lasthorizont Verwendung finden. Mit einer Abschätzgleichung, z.B. nach [Ross 64], wird die Ausfallwahrscheinlichkeit auf dem obersten bzw. untersten Lasthorizont in Abhängigkeit der dort vorliegenden Anzahl an Brüchen n_{Bi} und des dort vorliegenden Stichprobenumfangs n_i ermittelt.

$$P_{Ai} = \frac{3n_{Bi} - 1}{3n_i + 1} \quad (4.20)$$

Eintragen des logarithmischen Mittelwerts und des extremalen Lasthorizonts in ein Wahrscheinlichkeitspapier mit ihren Ausfallwahrscheinlichkeiten liefert die logarithmische Standardabweichung $s_{\log,S,SP}$ durch Ablesen oder Rechnung, **Abbildung 4.12**.

Das gezielte Platzieren von Versuchspunkten möglichst weit vom logarithmischen Mittelwert entfernt lässt erwarten, dass die Schätzung der logarithmische Standardabweichung besser gelingt als mit dem reinen Treppenstufenverfahren, [Klub 95].

4.3.4 Probitverfahren

Das Probitverfahren wurde von [Finn 47] zur Bestimmung von Insektizidkonzentrationen vorgeschlagen. Eine Anwendung zur Langzeitfestigkeitsbestimmung findet sich in [Dorf 61] und in [FVA 304]. Die Anwendung aus [FVA 304] wird hier beschrieben.

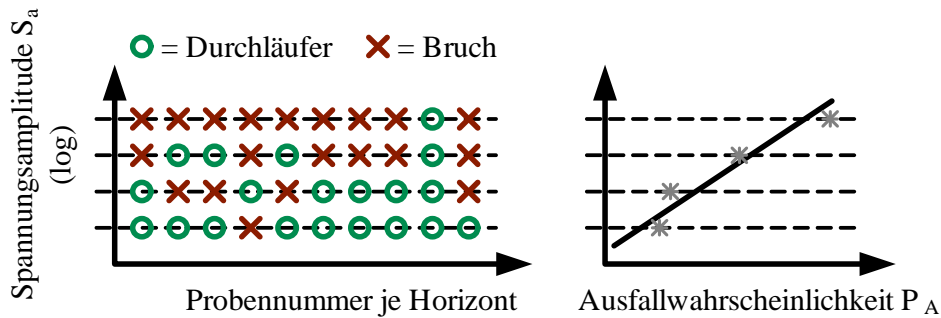


Abbildung 4.13: Experimentelle Bestimmung der Langzeitfestigkeit mit dem Probitverfahren

Im Bereich der geschätzten Langzeitfestigkeit werden mindestens vier Lasthorizonte festgelegt, [FVA 304], **Abbildung 4.13**. Auf jedem Lasthorizont sind mindestens $n_i = 10$ Proben zu prüfen, [FVA 304]. Zur Auswertung dürfen nur Lasthorizonte verwendet werden, auf denen sich mindestens ein Durchläufer befindet. Horizonte, die ausschließlich aus Brüchen bestehen, sind von der Auswertung ausgeschlossen, [FVA 304]. Existieren mehrere Lasthorizonte, auf denen nur Durchläufer vorhanden sind, dann darf davon nur einer Verwendung finden, [FVA 304]. In [FVA 304] wird nicht geregelt, welcher Lasthorizont dann auszuwählen ist. In der vorliegenden Arbeit wird vorgeschlagen, den höchsten zu verwenden.

Für die auswertbaren Lasthorizonte lässt sich wie beim Abgrenzungsverfahren, [Maen 77], Kapitel 4.3.2, jeweils eine Ausfallwahrscheinlichkeit P_{Ai} als Funktion der Anzahl an Brüchen n_{Bi} und des Stichprobenumfangs n_i auf dem Lasthorizont schätzen.

$$P_{Ai} = \frac{3n_{Bi} - 1}{3n_i + 1}, \text{ falls } n_{Bi} \neq 0 \quad (4.21)$$

$$P_{Ai} \leq 1 - 0,5^{\frac{1}{n_i}}, \text{ falls } n_{Bi} = 0 \quad (4.22)$$

Die Wertepaare aus Lasthorizont und Ausfallwahrscheinlichkeit werden in ein Wahrscheinlichkeitspapier eingetragen, **Abbildung 4.13**. Aus einer linearen Regressionsrechnung im Wahrscheinlichkeitspapier ergeben sich der logarithmischen Mittelwert $S_{aL,50\%,SP}$ und die logarithmische Standardabweichung $s_{\log,S,SP}$ der Stichprobe.

[Finn 47] und [FVA 304] geben keine Hinweise, wie die Lasthorizonte im geschätzten Langzeitfestigkeitsgebiet zu verteilen sind. Eine Möglichkeit stellt die Anwendung eines logarithmisch-konstanten Stufensprungs d dar, der in dieser Arbeit verwendet wird. Weiterhin sollen die extremalen Lasthorizonte $S_{a,min}$ und $S_{a,max}$ hier in Abhängigkeit der vorab geschätzten, logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,S}$ gewählt werden. Dabei ist $S_{a,Start}$ die vorab geschätzte Langzeitfestigkeit und x_{Probit} ein zu optimierender Verschiebungsfaktor, siehe Kapitel 7.4.

$$\lg(S_{a,min}) = \lg(S_{aL,Start}) - x_{Probit} \cdot s_{\log,S} \quad (4.23)$$

$$\lg(S_{a,max}) = \lg(S_{aL,Start}) + x_{Probit} \cdot s_{\log,S} \quad (4.24)$$

4.4 Rechnerische Verfahren

Rechnerische Verfahren, [Berg 99], [FKM 12], [Gude 99] und [Marq 04], erlauben das Abschätzen von Wöhlerlinien ohne die Durchführung von zeit- und kostenaufwändigen Schwingfestigkeitsversuchen. Diese rechnerischen Wöhlerlinien können eine große Hilfe bei der Planung von Versuchen im Zeit- und Langzeitfestigkeitsgebiet darstellen. Liegen keinerlei Erfahrungen vor, können unter Verwendung der rechnerischen Wöhlerlinien die Versuchshorizonte vergleichsweise gezielt platziert werden, [Müll 12] und [Müll 14].

Die rechnerischen Verfahren verwenden statische Werkstoffkennwerte sowie Geometrie-, Oberflächen- und Mittelspannungsinformationen zur Abschätzung der Langzeitfestigkeit S_{aL} , der Ecklastschwingspielzahl N_L und der Wöhlerlinienneigung k , [Ellm 11].

Die klassischen Verfahren unter den rechnerischen Wöhlerlinien wie [Berg 99], [Gude 99] und [FKM 12] benutzen ein Faktorkonzept. Das bedeutet, dass die einzelnen Einflüsse auf die Wöhlerlinie durch separate Faktoren berücksichtigt werden, **Abbildung 4.14**. Zunächst wird aus den statischen Werkstoffkennwerten werkstoffgruppenabhängig eine Werkstoffwechselfestigkeit geschätzt. Unter Einbeziehung der Geometrie- und Oberflächeninformationen wird die Werkstoffwechselfestigkeit in eine Bauteilwechselfestigkeit umgerechnet. Anschließend erfolgt unter Berücksichtigung der Mittelspannungsempfindlichkeit eine Berechnung der Bauteillangzeitfestigkeit je nach Mittelspannung. Die abschließende Schätzung von Ecklastschwingspielzahl und Wöhlerlinienneigung kann pauschal wie bei [FKM 12] oder unter Einbeziehung von Geometrie- und Oberflächeninformationen wie bei [Berg 99] und [Gude 99] erfolgen.

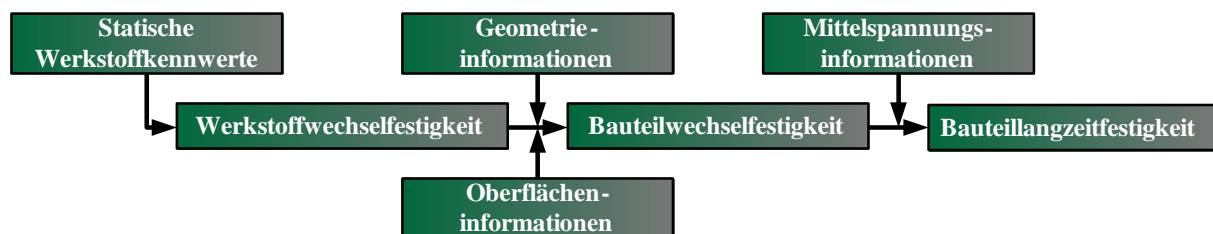


Abbildung 4.14: Verwendung eines Faktorkonzepts bei den klassischen Verfahren der rechnerischen Wöhlerlinien

Ergänzend zu den klassischen Verfahren existiert von [Marq 04] ein Vorschlag unter Verwendung Künstlich Neuronaler Netze (KNN), [Rey 11]. Im Gegensatz zu den klassischen Verfahren verarbeiten die Künstlich Neuronalen Netze Informationen parallel. Aus statischen Werkstoffkennwerten, Geometrie-, Oberflächen- und Mittelspannungsinformationen wird als erstes die ertragbare Spannungsamplitude bei einer Lebensdauer von $N = 2 \cdot 10^4$ abgeschätzt, **Abbildung 4.15**. Die Eingangsdaten erweitert um diese neue Information liefern in einem weiteren Künstlich Neuronalen Netz die ertragbare Spannungsamplitude bei einer Lebensdauer von $N = 2 \cdot 10^5$, **Abbildung 4.15**. In einem dritten Künstlich Neuronalen Netz werden alle bis dahin vorhandenen Daten verwendet, um die Langzeitfestigkeit S_{aL} zu schätzen, **Abbildung 4.15**.

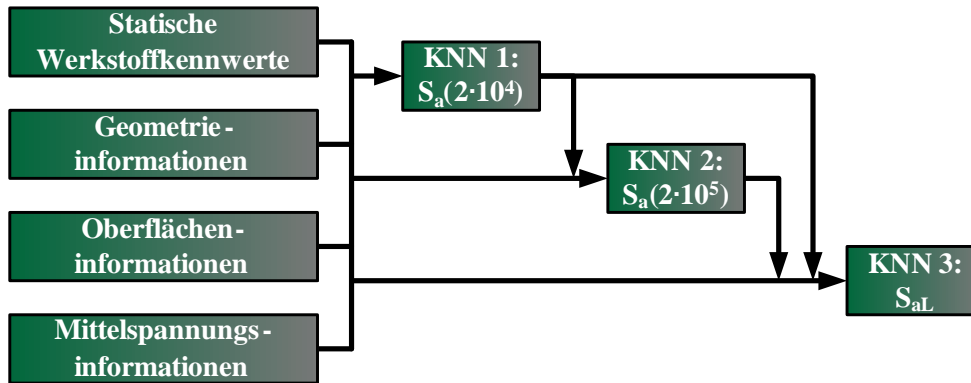


Abbildung 4.15: Verwendung Künstlich Neuronaler Netze (KNN) zur rechnerischen Abschätzung von Wöhlerlinien nach [Marq 04]

In [Ellm 11] wird eine Treffsicherheitsbewertung von rechnerischen Wöhlerlinien vorgenommen. Dazu werden für eine Vielzahl von Geometrien und Werkstoffen die von den rechnerischen Verfahren ermittelten Kennwerte Neigung, Langzeitfestigkeit und Ecklastschwingspielzahl auf die zugehörigen experimentellen bezogen. Die Abschätzungen der rechnerischen Wöhlerlinien stimmen im Mittel (50 %-Quantil) mit den experimentellen Ergebnissen ausreichend überein. Im Einzelfall können sich jedoch erhebliche Abweichungen ergeben, was in [Ellm 11] durch Streuspannen bezüglich der Neigungsschätzung T_k , der Langzeitfestigkeitsschätzung T_{SaL} und der Ecklastschwingspielzahlschätzung T_{NL} angegeben ist. Die Streuspannen können je nach verwendetem, rechnerischem Verfahren variieren, besitzen aber ähnliche Werte. **Tabelle 4.1** gibt typische Durchschnittswerte für die Streuspannen an.

$T_k \updownarrow$	$T_{SaL} \updownarrow$	$T_{NL} \leftrightarrow$
1,8	1,5	4,5

Tabelle 4.1: Typische Streuspannen bei der Anwendung rechnerischer Wöhlerlinien für die Neigungsschätzung T_k , die Langzeitfestigkeitsschätzung T_{SaL} und die Ecklastschwingspielzahlschätzung T_{NL} , Daten aus [Ellm 11]

An dieser Stelle sei angemerkt, dass es sich bei der Streuspanne der Neigungsschätzung T_k und der Streuspanne der Langzeitfestigkeitsschätzung T_{SaL} um Streuparameter in Lastrichtung handelt. Die Streuspanne der Langzeitfestigkeitsschätzung von $T_{SaL} = 1,5$ bedeutet z.B., dass in 80 % aller Fälle die Langzeitfestigkeit um weniger als Faktor $\sqrt{T_{SaL}} = \sqrt{1,5} = 1,22$ über- bzw. unterschätzt wird.

Bei der Streuspanne der Ecklastschwingspielzahlschätzung handelt es sich um einen Streuparameter in Lebensdauerichtung. In 80 % aller Fälle wird die Ecklastschwingspielzahl um weniger als Faktor $\sqrt{T_{NL}} = \sqrt{4,5} = 2,12$ über- bzw. unterschätzt.

5 Wahrscheinlichkeitsfunktionen für die Ermüdungsfestigkeit

Zur Auswertung von Schwingfestigkeitsversuchen ist die Annahme einer Wahrscheinlichkeitsfunktion erforderlich. Häufig finden die Normalverteilung oder die logarithmische Normalverteilung Verwendung, [Dixo 48], [Hück 83], [Liu 01], [Mart 11a], [Mart 11b], [Müll 12] und [Müll 14]. Für das Ermüdungsverhalten von Wälzlagern, [Moye 93] und [Seif 04], und die Grübchentragefähigkeit von Verzahnungen, [FVA 554-I], wird in der Regel mit der Weibullverteilung gerechnet. In Einzelfällen erfolgt eine Anwendung der arcsin-Verteilung, [Deng 75], [Dorf 61] und [Klub 95], oder der Logit-Verteilung, [Dorf 61] und [Liu 01].

Die Frage, welche Wahrscheinlichkeitsfunktion die Versuchsergebnisse optimal wiedergibt, ist unbeantwortet, [Aden 01], und kann sicher nicht allgemeingültig geklärt werden. Durch die systematische Untersuchung experimenteller Versuchsreihen lassen sich jedoch Tendenzen aufzeigen, welche Wahrscheinlichkeitsfunktion für Schwingfestigkeitsversuche in der Regel zutreffend ist.

In diesem Kapitel werden zunächst bestehende Untersuchungen bezüglich der vorliegenden Wahrscheinlichkeitsfunktionen zusammengefasst. Anschließend wird eine Datenbasis mit experimentellen Schwingfestigkeitsversuchen mit Fokus auf hohe Stichprobenumfänge aufgebaut. Dazu werden vorhandene Ergebnisse aus der Literatur entnommen und die Datenbasis um eigene Versuchsreihen erweitert. Die beiden in der Betriebsfestigkeit üblichen Wahrscheinlichkeitsfunktionen logarithmische Normalverteilung und zweiparametrische Weibullverteilung werden mit Hilfe der Datenbasis auf ihre Anwendbarkeit geprüft. Da beide Verteilungsfunktionen je durch einen Lage- und einen Streuparameter beschrieben werden und für logarithmierte Merkmalswerte zu beiden Seiten offen sind, sind sie direkt miteinander vergleichbar. Die dreiparametrische Weibullverteilung besitzt zusätzlich zum Lage- und Streuparameter einen Parameter für die ausfallfreie Zeit. Ein direkter Vergleich mit der logarithmischen Normalverteilung bzw. der zweiparametrischen Weibullverteilung ist daher nicht zulässig. In der vorliegenden Arbeit soll die Frage geklärt werden, ob Schwingfestigkeitsversuche mit der logarithmischen Normalverteilung oder der zweiparametrischen Weibullverteilung beschrieben werden können und welcher von beiden der Vorzug zu geben ist. Analysen mit der dreiparametrischen Weibullverteilung finden deshalb nicht statt.

Für den Zeitfestigkeitsbereich lässt sich mit Literaturwerten eine umfangreiche Datenbasis aufbauen, die eine statistisch abgesicherte Bewertung zulässt. Im Langzeitfestigkeitsbereich existiert hingegen eine statistisch gesehen geringe Datenlage. Ergebnisse im Langzeitfestigkeitsbereich liegen aufgrund der notwendigen Versuchsführung innerhalb einer Versuchsreihe nur für diskrete Lasthorizonte vor. Damit wird z.B. im Wahrscheinlichkeitspapier je Lasthorizont nur ein Datenpunkt generiert. Für belastbare Aussagen im Langzeitfestigkeitsbereich sind folglich im Vergleich zum Zeitfestigkeitsbereich erhöhte Anforderungen an den Stichprobenumfang zu stellen. Von einer Untersuchung im Langzeitfestigkeitsbereich muss daher in dieser Arbeit Abstand genommen werden.

5.1 Bestehende Untersuchungen zu Wahrscheinlichkeitsfunktionen in der Betriebsfestigkeit

In der allgemeinen Betriebsfestigkeit hat sich die Annahme der logarithmischen Normalverteilung durchgesetzt, [Buxb 92], [Haib 06] und [Rada 07]. [Schr 55] überprüft und bestätigt diese Annahme anhand zahlreicher Versuchsreihen mit sehr großen Stichprobenumfängen. Die Überprüfung erfolgt mittels des χ^2 -Anpassungstests, der nach heutigem Kenntnisstand eine niedrige Aussagefähigkeit besitzt, [Sach 06].

Die Weibullverteilung, wie sie heute in Literatur zur Statistik, z.B. [Fahr 07] und [Sach 06], zu finden ist, wurde in ihren Grundlagen 1939 von Weibull formuliert, [Weib 39]. [Weib 39] beschreibt in seinem Beitrag die Abhängigkeit der statischen Werkstofffestigkeit von der Verteilung von Fehlstellen im Werkstoffvolumen. 1951 stellt Weibull die heute gebräuchliche Form der zweiparametrischen Weibullverteilung vor, [Weib 51]. Dabei wird eine breite Anwendbarkeit, u.a. auch für Wöhlerversuche im Zeitfestigkeitsbereich, angegeben. Ein Nachweis der Anwendbarkeit erfolgt in [Weib 51] durch den χ^2 -Anpassungstest. [Weib 51] gibt den Hinweis, dass die vorgeschlagene Verteilungsfunktion keine allgemeine Gültigkeit besitzt und im Einzelfall unzutreffend sein kann.

Lundberg und Palmgren wenden die zweiparametrische Weibullverteilung auf ihr Lebensdauermodell für Kugel- und Rollenlager an, [Lund 47] und [Lund 50], das bis heute Anwendung findet. In [Palm 64] wird die Aussage getroffen, dass die Weibullverteilung mit guter Näherung die beobachteten Versuchsergebnisse für Kugel- und Rollenlager beschreibt.

[Schr 63] zeigt einen Weg auf, wie Lebensdauerversuche an Wälzlagern mit der Weibullverteilung ausgewertet werden können. [Schr 63] räumt ein, dass sich der Einsatz der Weibullverteilung nur teilweise begründen lässt, die Erfahrung aber eine ausreichende Approximationsgüte zeigt.

[Müll 78] führt Schwingfestigkeitsversuche an 500 Wälzlagern, 379 Scheibenrädern und 100 Stahlproben durch und untersucht dabei die Anwendbarkeit verschiedener Wahrscheinlichkeitsfunktionen. Dazu werden unterschiedliche Streuparameter berechnet und aufeinander bezogen. Das Vorgehen ähnelt dem im Shapiro-Wilk-Test, [Shap 65], jedoch ohne die Betrachtung von Signifikanzniveaus. Keine der untersuchten Wahrscheinlichkeitsfunktionen liefert in allen Fällen überzeugende Ergebnisse. Die logarithmische Normalverteilung trifft für alle Versuchsreihen besser als die Weibullverteilung. [Müll 78] trifft die Aussage, dass die Anwendung der logarithmischen Normalverteilung im Zeitfestigkeitsbereich vertretbar ist.

Untersuchungen an Kegelrollenlagern zeigen eine gute Übereinstimmung der Weibullverteilung mit den Versuchsergebnissen, [Moye 93]. Dabei wird ein sehr hoher Stichprobenumfang von $n = 3465$ verwendet, wodurch eine gute Absicherung auch bei sehr kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten $P_A \ll 1\%$ erreicht wird. Als Bewertungskriterium wird das Bestimmtheitsmaß im Weibullwahrscheinlichkeitspapier herangezogen.

Eine vergleichende Gegenüberstellung der in der Betriebsfestigkeit üblichen Wahrscheinlichkeitsfunktionen logarithmische Normalverteilung und Weibullverteilung auf Basis zahlreicher Versuchsreihen mit hohen Stichprobenumfängen findet sich in der Literatur nicht. Weiterhin fehlt in der Regel die Anwendung moderner Testverfahren wie des Shapiro-Wilk-Tests. In den nachfolgenden Kapitel wird die Anwendbarkeit der logarithmischen Normalverteilung und der Weibullverteilung auf eine umfangreiche Datenbasis im Zeitfestigkeitsbereich überprüft. Eine Anwendbarkeitsanalyse im Langzeitfestigkeitsbereich erfolgt aufgrund der unzureichenden Datenlage nicht.

5.2 Aufbau einer Datenbasis mit Horizontenversuchen mit hohem Stichprobenumfang

Zur Überprüfung von Stichproben auf ihre Wahrscheinlichkeitsfunktionen sind ausreichend große Stichprobenumfänge erforderlich. Versuchsreihen mit großen Stichprobenumfängen sind aus Zeit- und Kostengründen in der Betriebsfestigkeit selten.

In [Schr 55] finden sich 36 Horizontenversuche im Zeitfestigkeitsgebiet an Werkstoffproben mit sehr großen Stichprobenumfängen zwischen $63 \leq n \leq 184$. Diese Versuchsreihen werden von [Schä 08] durch acht Experimente an Schraubenschrauben zweier Festigkeitsklassen mit Stichprobenumfängen $19 \leq n \leq 500$ erweitert. [Schr 63] führt einen Horizontenversuch an $n = 49$ Wälzlager durch. [Maen 66] ermittelt in seiner Dissertation die Wöhlerlinie für einen C35-Vergütungsstahl. Darunter finden sich 13 Lasthorizonte mit je $n = 20$ Proben und einer mit $n = 24$ Proben, die ausschließlich Brüche enthalten. [Dorf 61] können zwei Lasthorizonte mit je $n = 30$ Proben für einen Baustahl entnommen werden, die ausschließlich aus Brüchen bestehen. Im Data Book On Fatigue Strength Of Metallic Materials, [Tana 82], sind zahlreiche Versuchsreihen dokumentiert, die jedoch im Regelfall den Anspruch eines Stichprobenumfangs von $n > 20$ nicht erfüllen. Mit den Datensätzen 204-016 bis 204-021 kann ein Horizontenversuch mit Stichprobenumfang $n = 100$ für einen C25-Vergütungsstahl zusammengestellt werden. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Proben in den Datensätzen 204-016 bis 204-021 keine einheitliche Oberflächengüte besitzen. Jedoch wird angegeben, dass sich keine signifikanten Unterschiede in den ermittelten Lebensdauern erkennen lassen, [Tana 82]. [Haib 70] führt Untersuchungen an Kreuzstößen aus St 37 mit K-Naht durch. Darunter findet auch ein Wöhlerversuch auf einem Lasthorizont mit $n = 40$ statt.

Zusätzlich zu den Ergebnissen aus der Literatur werden eigene Horizontenversuche im Zeitfestigkeitsgebiet an Aluminiumschrauben aus EN AW 7075 T6 durchgeführt. Bei den Schrauben handelt es sich um Sechskantschrauben nach ISO 4017, [ISO 4017], mit Gewinde annähernd bis Kopf in der Abmessung M8x50. Die Schrauben liegen im Wärmebehandlungszustand T6 vor und sind damit lösungsgeglüht und warmausgelagert, was nach [EN 515] als stabiler Zustand gilt. Mit den Aluminiumschraubenversuchen wird die Datenbasis insbesondere im Hinblick auf die vergleichsweise gering vertretenen Aluminiumlegierungen erweitert. Details bezüglich des Versuchsaufbaus und der Einzelversuchsergebnisse befinden sich in Kapitel 11.1.

Die angesprochenen Versuchsergebnisse in [Schr 55], [Schr 63], [Schä 08], [Maen 66], [Dorf 61], [Tana 82] und [Haib 70] sowie die eigenen Versuchsreihen sind für jede Probe doku-

mentiert und können daher für einen Test auf die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsfunktion verwendet werden. In Summe stehen damit 66 Einzelversuchsreihen (=Versuchsgruppen), vgl. **Tabelle 5.1** und **Tabelle 5.2**, mit Stichprobenumfängen $19 \leq n \leq 500$ zur Verfügung. Insgesamt werden 5734 Einzelversuchsergebnisse in die Datenbasis aufgenommen. **Abbildung 5.1** zeigt eine Darstellung der in der Datenbasis vorhandenen Stichprobenumfänge. Mehr als 67 % der vorhandenen Versuchsgruppen besitzt einen Stichprobenumfang von $n > 75$, **Abbildung 5.1 rechts**.

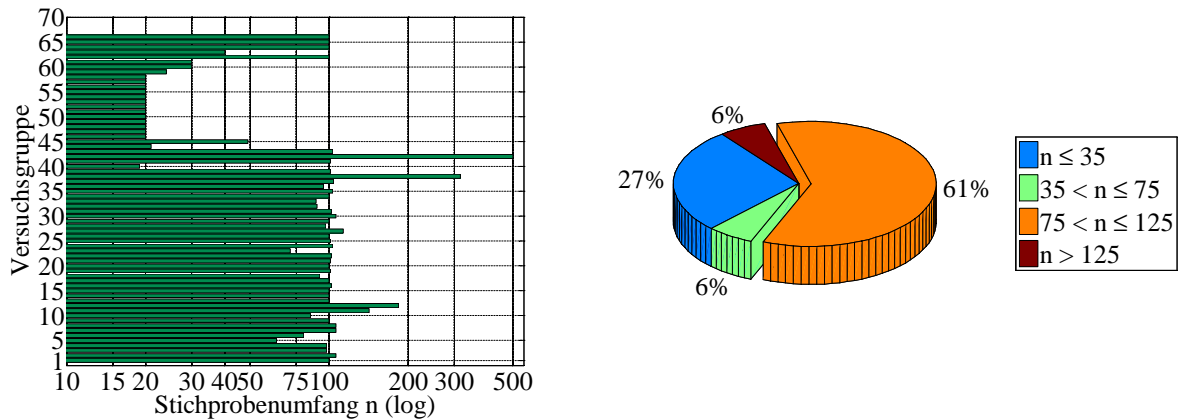


Abbildung 5.1: Übersicht über die vorhandenen Stichprobenumfänge in der aufgebauten Datenbasis, absolute Darstellung (links) und kategorisierte, auf die Anzahl der Versuchsgruppen bezogene Darstellung (rechts), (66 Versuchsgruppen bzw. Versuchsreihen, $19 \leq n \leq 500$, 5734 Einzelversuchsergebnisse)

Abbildung 5.2 lässt sich entnehmen, dass ein großer Bereich von $790 \leq N \leq 1,2 \cdot 10^8$ an Schwingspielen bzw. Umdrehungen im Zeitfestigkeitsbereich mit der Datenbasis abgedeckt wird. Der Schwerpunkt liegt im Bereich von $N \approx 10^5$ Schwingspielen, **Abbildung 5.2**.

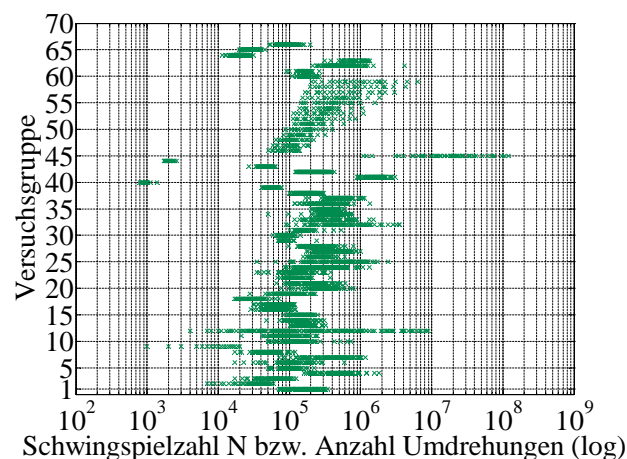


Abbildung 5.2: Abgedeckter Schwingenspielzahlbereich in der aufgebauten Datenbasis (66 Versuchsgruppen bzw. Versuchsreihen, $19 \leq n \leq 500$, 5734 Einzelversuchsergebnisse)

Tabelle 5.1 und **Tabelle 5.2** sind detaillierte Informationen über die Datenbasis zu entnehmen. Die Datenbasis enthält Werkstoffproben aus unterschiedlichen Werkstoffen mit verschiedenen

Kerben, Oberflächenzuständen und Belastungsarten, die teilweise auf zahlreichen Lasthorizonten geprüft wurden. Weiterhin sind ausgeführte Bauteile in Form von Schrauben und Wälzlagern enthalten. **Abbildung 5.3** verdeutlicht die Anteile der unterschiedlichen Werkstoffgruppen und Bauteile an der aufgebauten Datenbasis. Die Stahlwerkstoffe (Baustahl, Vergütungsstahl, Einsatzstahl und Stahlschraube) stellen mit 76 % den mit Abstand größten Anteil.

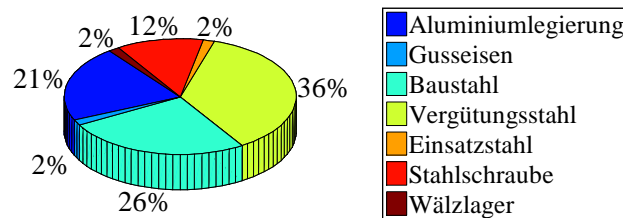


Abbildung 5.3: Anteil der Werkstoffgruppen bzw. Bauteile an der aufgebauten Datenbasis (66 Versuchsgruppen bzw. Versuchsreihen)

Versuchsgruppe	Werkstoffgruppe / Bauteil	Stichprobenumfang	Quelle
1	Aluminiumlegierung	n = 100	[Schr 55]
2	Aluminiumlegierung	n = 106	[Schr 55]
3	Aluminiumlegierung	n = 98	[Schr 55]
4	Aluminiumlegierung	n = 98	[Schr 55]
5	Aluminiumlegierung	n = 63	[Schr 55]
6	Aluminiumlegierung	n = 80	[Schr 55]
7	Aluminiumlegierung	n = 106	[Schr 55]
8	Aluminiumlegierung	n = 106	[Schr 55]
9	Aluminiumlegierung	n = 100	[Schr 55]
10	Aluminiumlegierung	n = 85	[Schr 55]
11	Aluminiumlegierung	n = 142	[Schr 55]
12	Gusseisen	n = 184	[Schr 55]
13	Baustahl	n = 100	[Schr 55]
14	Baustahl	n = 100	[Schr 55]
15	Baustahl	n = 100	[Schr 55]
16	Baustahl	n = 102	[Schr 55]
17	Baustahl	n = 100	[Schr 55]
18	Baustahl	n = 92	[Schr 55]
19	Baustahl	n = 101	[Schr 55]
20	Baustahl	n = 100	[Schr 55]
21	Baustahl	n = 101	[Schr 55]
22	Baustahl	n = 102	[Schr 55]
23	Baustahl	n = 71	[Schr 55]
24	Baustahl	n = 103	[Schr 55]
25	Baustahl	n = 101	[Schr 55]

Tabelle 5.1: Übersicht der vorhandenen Horizontenversuche zur Überprüfung auf eine Wahrscheinlichkeitsfunktion (Teil I)

Versuchsgruppe	Werkstoffgruppe / Bauteil	Stichprobenumfang	Quelle
26	C35-Vergütungsstahl	n = 100	[Schr 55]
27	C35-Vergütungsstahl	n = 113	[Schr 55]
28	C35-Vergütungsstahl	n = 97	[Schr 55]
29	C35-Vergütungsstahl	n = 100	[Schr 55]
30	C35-Vergütungsstahl	n = 106	[Schr 55]
31	kaltgezogener Baustahl	n = 102	[Schr 55]
32	Cr-Mo-Vergütungsstahl	n = 90	[Schr 55]
33	Cr-Mo-Vergütungsstahl	n = 89	[Schr 55]
34	Cr-Ni-Vergütungsstahl	n = 100	[Schr 55]
35	Cr-Ni-Vergütungsstahl	n = 103	[Schr 55]
36	Einsatzstahl	n = 95	[Schr 55]
37	Stahlschraube M6 12.9	n = 104	[Schä 08]
38	Stahlschraube M6 12.9	n = 316	[Schä 08]
39	Stahlschraube M6 12.9	n = 101	[Schä 08]
40	Stahlschraube M6 12.9	n = 19	[Schä 08]
41	Stahlschraube M8 8.8	n = 101	[Schä 08]
42	Stahlschraube M8 8.8	n = 500	[Schä 08]
43	Stahlschraube M8 8.8	n = 103	[Schä 08]
44	Stahlschraube M8 8.8	n = 21	[Schä 08]
45	Wälzlager	n = 49	[Schr 63]
46	C35-Vergütungsstahl	n = 20	[Maen 66]
47	C35-Vergütungsstahl	n = 20	[Maen 66]
48	C35-Vergütungsstahl	n = 20	[Maen 66]
49	C35-Vergütungsstahl	n = 20	[Maen 66]
50	C35-Vergütungsstahl	n = 20	[Maen 66]
51	C35-Vergütungsstahl	n = 20	[Maen 66]
52	C35-Vergütungsstahl	n = 20	[Maen 66]
53	C35-Vergütungsstahl	n = 20	[Maen 66]
54	C35-Vergütungsstahl	n = 20	[Maen 66]
55	C35-Vergütungsstahl	n = 20	[Maen 66]
56	C35-Vergütungsstahl	n = 20	[Maen 66]
57	C35-Vergütungsstahl	n = 20	[Maen 66]
58	C35-Vergütungsstahl	n = 20	[Maen 66]
59	C35-Vergütungsstahl	n = 24	[Maen 66]
60	Baustahl	n = 30	[Dorf 61]
61	Baustahl	n = 30	[Dorf 61]
62	C25-Vergütungsstahl	n = 100	[Tana 82]
63	St 37 Kreuzstoß mit K-Naht	n = 40	[Haib 70]
64	Aluminiumschraube	n = 100	eigen
65	Aluminiumschraube	n = 100	eigen
66	Aluminiumschraube	n = 100	eigen
		$\Sigma = 5734$	

Tabelle 5.2: Übersicht der vorhandenen Horizontenversuche zur Überprüfung auf eine Wahrscheinlichkeitsfunktion (Teil II)

5.3 Analyse der Datenbasis auf ihre Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Jede experimentelle Versuchsreihe der Datenbasis aus Kapitel 5.2 wird einer separaten Analyse unterworfen. Die Versuchsreihen werden mittels der Wahrscheinlichkeitspapiere für logarithmische Normalverteilung und Weibullverteilung getestet. Als Gütekriterium werden die zugehörigen Bestimmtheitsmaße $r_{\log-NV}^2$ und r_{WBL}^2 berechnet. Zusätzlich wird auf die Versuchsreihen der Shapiro-Wilk-Test angewendet.

Abbildung 5.4 links zeigt, dass sowohl die logarithmische Normalverteilung als auch die Weibullverteilung die Versuchsergebnisse gut approximieren. Wird gefordert, dass mindestens 95 % aller gefundenen Beobachtungen (Bestimmtheitsmaß $r^2 \geq 0,95$) in einer Versuchsreihe durch die entsprechende Verteilungsfunktion beschrieben werden können, dann erfüllt die logarithmische Normalverteilung dieses Kriterium in gut 86 % der untersuchten Fälle. Die Weibullverteilung schneidet mit gut 36 % erkennbar schlechter ab, **Abbildung 5.4 links**.

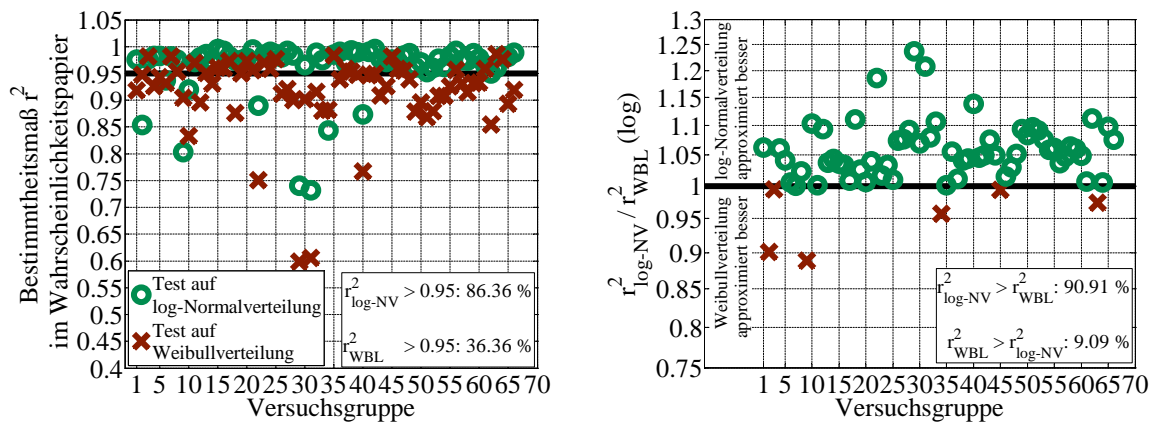


Abbildung 5.4: Absolute (links) und bezogene Bestimmtheitsmaße (rechts) $r_{\log-NV}^2$ und r_{WBL}^2 aus der linearen Regression in den Wahrscheinlichkeitspapieren für die logarithmische Normalverteilung bzw. die Weibullverteilung für die Analyse der Datenbasis aus Kapitel 5.2

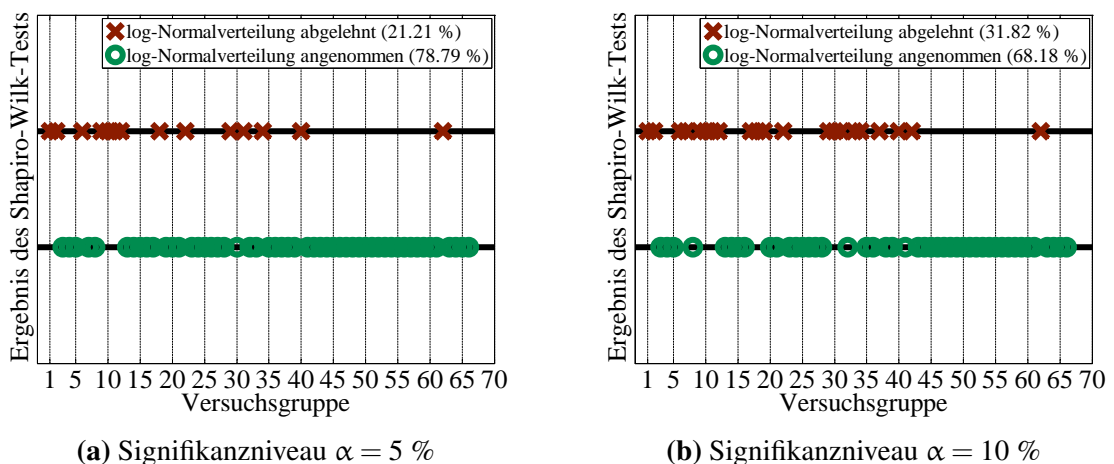


Abbildung 5.5: Ergebnisse des Shapiro-Wilk-Tests für die Analyse der Datenbasis aus Kapitel 5.2 für verschiedene Signifikanzniveaus

In gut neun von zehn Fällen approximiert die logarithmische Normalverteilung die Versuchsergebnisse besser als die Weibullverteilung, **Abbildung 5.4 rechts** (grüne Kreise). Für die untersuchten Wälzlager (Versuchsgruppe 45) ist die Weibullverteilung im Vorteil (rotes Kreuz). Die logarithmische Normalverteilung liefert aber kein erkennbar schlechteres Ergebnis ($r_{\log-NV}^2 \approx r_{WBL}^2$), **Abbildung 5.4 rechts**.

Wird für den Shapiro-Wilk-Test ein übliches Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$, [Fahr 07], verwendet, dann wird die Hypothese, dass die Versuchsergebnisse einer logarithmischen Normalverteilung folgen, in knapp acht von zehn Fällen angenommen, **Abbildung 5.5 links**. Wird das Signifikanzniveau auf einen Wert von $\alpha = 10\%$ erhöht, dann wird die Hypothese noch in knapp sieben von zehn Fällen angenommen. Die Hypothese wird in beiden Fällen auch für die untersuchten Wälzlager (Versuchsgruppe 45) nicht verworfen, **Abbildung 5.5**. Je größer das Signifikanzniveau ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit einen Fehler erster Art zu begehen. Das bedeutet, dass die Nullhypothese (hier logarithmische Normalverteilung liegt vor) verworfen wird, obwohl sie korrekt ist.

Im Shapiro-Wilk-Test sind die Aluminiumlegierungen auffällig, **Abbildung 5.5**. Für die Versuchsgruppen 1 bis 11 aus [Schr 55] lehnt der Shapiro-Wilk-Test die Hypothese der logarithmischen Normalverteilung mit einer erkennbaren Tendenz ab. Diese Tendenz kann durch die eigenen Versuchsreihen an Aluminiumschrauben jedoch nicht bestätigt werden, **Abbildung 5.5**. Anzumerken ist, dass sich für die Aluminiumlegierungen aus [Schr 55] der Zustand der Wärmebehandlung nicht vollständig nachvollziehen lässt. Im Wahrscheinlichkeitspapier, **Abbildung 5.4**, erfüllt die logarithmische Normalverteilung auch für die Aluminiumverbindungen das hier geforderte Kriterium $r^2 \geq 0,95$ mehrheitlich.

Trotz der anspruchsvoll gewählten Kriterien lässt sich die deutliche Tendenz erkennen, dass Schwingfestigkeitsversuche im Zeitfestigkeitsgebiet in der Regel durch die logarithmische Normalverteilung gut beschrieben werden können, **Abbildung 5.4** und **Abbildung 5.5**. In den nachfolgenden Simulationsmodellen für das Zeitfestigkeitsgebiet wird daher ausschließlich die logarithmische Normalverteilung betrachtet.

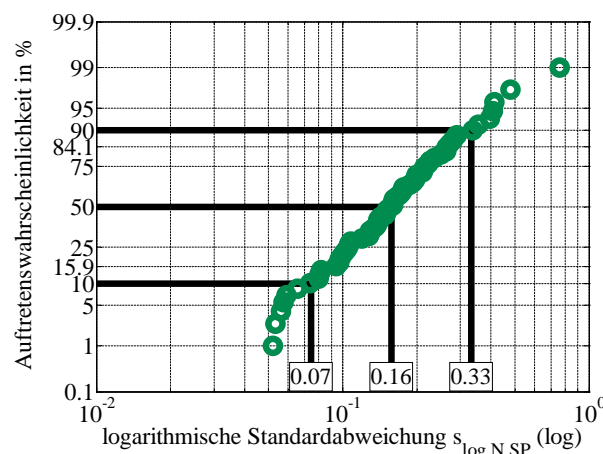


Abbildung 5.6: Logarithmische Standardabweichung $s_{\log,N,SP}$ der Stichproben für die Versuchsreihen der aufgebauten Datenbasis

Für den Langzeitfestigkeitsbereich existiert bisher keine statistisch belastbare Analyse auf die zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsfunktionen aufgrund der geringen Datenlage. Für die nachfolgenden Simulationen im Langzeitfestigkeitsbereich gilt daher weiterhin nur die Annahme, dass Langzeitfestigkeitskennwerte einer logarithmischen Normalverteilung folgen.

Neben den Wahrscheinlichkeitsfunktionen werden die Versuchsreihen auch bezüglich ihrer logarithmischen Standardabweichungen $s_{\log,N,SP}$ untersucht, **Abbildung 5.6**. Die in [Ade01] getroffenen Aussagen bezüglich der logarithmischen Standardabweichungen in Lebensdauer-richtung $0,10 \leq s_{\log,N,SP} \leq 0,30$ werden durch die Versuchsreihen mit großem Stichprobenumfang bestätigt. Eine Analyse der Streuung der logarithmischen Standardabweichungen wie in [Ade01] ist mit der vorliegenden Datenbasis nicht sinnvoll. Die Datenbasis enthält eine Durchmischung von verschiedenen Werkstoffen und Bauteilen.

6 Simulative Untersuchungen im Zeitfestigkeitsgebiet

Zur experimentellen Ermittlung spannungs- bzw. kraftgeregelter Wöhlerlinien existieren keine verbindlichen Vorschriften. Bestehende Normen wie [DIN 50100] definieren zwar Begrifflichkeiten, liefern dem Anwender aber keine verwendbaren Aussagen bezüglich der anzuwendenden Verfahren, Auswertemethoden und des benötigten Stichprobenumfangs.

Durch den Einsatz von Monte-Carlo-Simulationen, vgl. Kapitel 3.4, lassen sich Verfahren und Auswertemethoden zur experimentellen Ermittlung von Wöhlerlinien bewerten und Empfehlungen ableiten, [Hück 83], [Liu 01], [Mart 11a], [Mart 11b], [Müll 12], [Müll 14], [Poll 06] und [Wall 11]. Voraussetzung ist, dass die Grundgesamtheit bekannt ist, damit sie vorgegeben werden kann. In Kapitel 5 wurde gezeigt, dass Schwingfestigkeitsversuche im Zeitfestigkeitsgebiet in der Regel durch die logarithmische Normalverteilung beschrieben werden können. Mit den umfangreichen Untersuchungen zur Streuung der Schwingfestigkeit in [Aden 01] existieren belastbare Erkenntnisse bezüglich typischer, logarithmischer Standardabweichungen in der Schwingfestigkeit. Von zusätzlichem, besonderem Wert sind Adenstedts Aussagen bezüglich der Streuung der logarithmischen Standardabweichung, [Aden 01]. Sprich die Erkenntnis, dass die logarithmische Standardabweichung selbst wiederum einer Streuung unterlegen ist. Mit den Ergebnissen aus Kapitel 5 und den Streuungsuntersuchungen in [Aden 01] lässt sich die Grundgesamtheit realitätsnah beschreiben und somit für Monte-Carlo-Simulationen verwenden, vgl. [Mart 11a], [Mart 11b], [Müll 12] und [Müll 14].

In diesem Kapitel werden das Perlenschnurverfahren und das Horizontenverfahren zur Ermittlung der Zeitfestigkeitsgeraden mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen analysiert. Dazu werden die in [Mart 11a] und [Mart 11b] vorgestellten Simulationsmodelle um die Streuung der logarithmischen Standardabweichung erweitert. Das bedeutet, dass die vorgegebene, logarithmische Standardabweichung einer eigenen Verteilungsfunktion folgt. Zusätzlich wird für das Horizontenverfahren der Einfluss rechnerischer Wöhlerlinien in der Versuchsplanung zur Platzierung der Lasthorizonte untersucht. Ergebnisse sind Maßzahlen für die Güte der Lage-, Neigungs- und Standardabweichungsschätzung mit dem Perlenschnur- und dem Horizontenverfahren. Aus den Ergebnissen lassen sich optimierte Versuchsstrategien ableiten und Empfehlungen für die zu verwendenden Verfahren treffen. Weiterhin liefern die Simulationen Erkenntnisse über den zu verwendenden Mindeststichprobenumfang bzw. über die Verwendung von statistisch begründeten Sicherheitsfaktoren bei festgelegtem Stichprobenumfang.

In [Mart 11a] wird gezeigt, dass die Versuchspunkte im Zeitfestigkeitsbereich möglichst nahe zu den Übergangsbereichen zum Kurzzeit- und Langzeitfestigkeitsbereich platziert werden sollten. Dadurch werden hohe Schätzgüten für die Neigungs- und Lageschätzung der Zeitfestigkeitsgeraden erhalten. Das abgedeckte Schwingenspielzahlintervall ist damit ein wesentlicher Versuchs- bzw. Simulationsparameter. In der vorliegenden Arbeit wird daher der Begriff der Spreizung N_2/N_1 eingeführt, **Abbildung 6.1**. Bei bekannter 50 %-Wöhlerlinie der Grundgesamtheit können durch Vorgabe des minimalen und maximalen Prüfhorizonts S_{a2} bzw. S_{a1} die zugehörigen, mittleren Schwingenspielzahlen N_2 und N_1 berechnet werden, **Abbildung 6.1**. Das Verhältnis dieser beiden Schwingenspielzahlen wird hier als Spreizung definiert. Für den Fall, dass rechnerische Wöhlerlinien zur Versuchsplanung zum Einsatz kommen, Kapitel 6.2.1, wird die Spreizung auf Basis der rechnerischen Wöhlerlinie bestimmt, **Abbildung 6.1**.

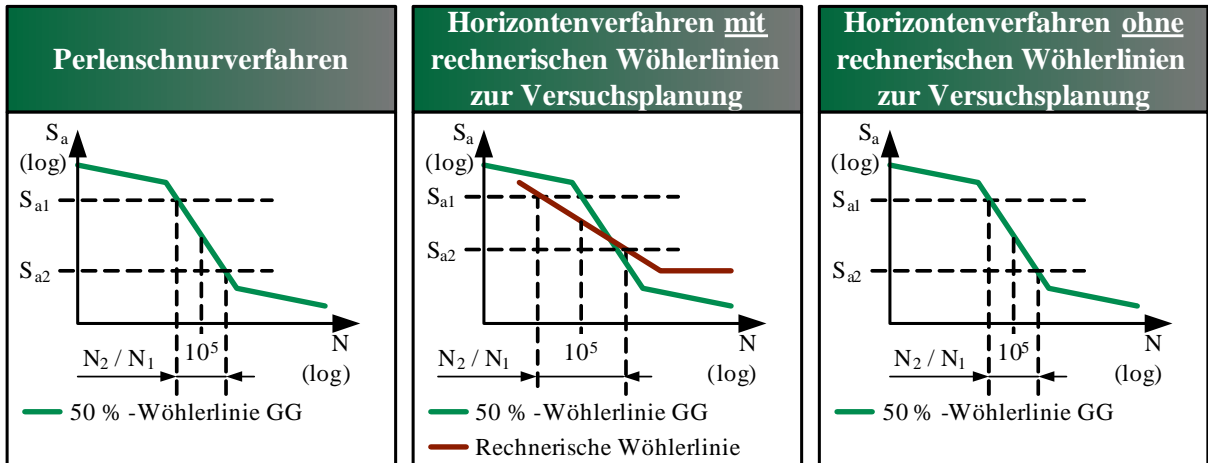


Abbildung 6.1: Definition der Spreizung N_2/N_1 für Untersuchungen im Zeitfestigkeitsgebiet

6.1 Perlenschnurverfahren

6.1.1 Aufbau des Simulationsmodells

Vor dem Versuch führt der Versuchsingenieur in der Praxis für die zu erwartende Wöhlerlinie aufgrund von Erfahrungen oder rechnerischen Wöhlerlinien, [Berg 99], [FKM 12], [Gude 99], [Marq 04], eine Vorabschätzung durch. Die Vorabschätzung durch rechnerische Wöhlerlinien ist mit nicht zu vernachlässigenden Streuungen behaftet, [Ellm 11]. Wird versucht den ersten Versuch so anzusetzen, dass eine Lebensdauer von $N \approx 10^5$ erreicht wird, dann ist dieser Versuch für die Zeitfestigkeit in der Regel gültig. Der Versuchsingenieur wird auf Basis dieses ersten, experimentellen Befunds den zweiten Versuch planen und durchführen usw. Im Perlenschnurverfahren erfolgt die Versuchsplanung und Versuchsführung folglich durch Einbeziehung der vorangegangenen, experimentellen Erkenntnisse der Versuchsreihe. Die Unsicherheiten der Vorabschätzung wirken sich damit nicht bemerkbar auf die Platzierung der Versuchspunkte aus. Die Streuungen der Vorabschätzung, z.B. durch rechnerische Wöhlerlinien, brauchen daher in der Simulation des Perlenschnurverfahrens keine Berücksichtigung finden.

Im Simulationsmodell erfolgt die Vorgabe der Grundgesamtheit durch die 50 %-Wöhlerlinie ($P_A = 50\%$). Dabei wird die Darstellung nach [Basq 10] verwendet. Die Geradengleichung für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 50\%$ ist dann durch einen Punkt und die Neigung $k_{50\%,GG}$ vollständig beschrieben, **Abbildung 6.2**.

Für die Simulation wird unterstellt, dass die logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit $s_{\log,N,GG}$ über den gesamten Zeitfestigkeitsbereich konstant bleibt, vgl. [Mart 11b]. Wie später gezeigt wird, sind die Schätzungen von Lage und Neigung abhängig von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit. Dem Versuchsingenieur muss daher schon bei der Versuchsplanung eine möglichst gute Schätzung der logarithmischen Standardabweichung vorliegen, damit der benötigte Stichprobenumfang n sinnvoll gewählt werden kann, wenn dieser nicht bereits durch andere Randbedingungen vorgegeben ist. Zur Vorabschätzung der logarithmischen Standardabweichung kann der Versuchsingenieur sich dazu an den Angaben in [Aden 01] orientieren oder es können Erfahrungswerte verwendet werden. [Aden 01]

zeigt, dass die logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit selbst einer Streuung unterliegt, vgl. auch **Abbildung 5.6**. Eine typische logarithmische Standardabweichung der logarithmischen Standardabweichungen, die in der vorliegenden Arbeit Verwendung findet, beträgt $s_{\log,N,GG,s} = 0,25$, [Aden 01]. Im Mittel beträgt sie $0,10 \leq s_{\log,N,GG,50\%} \leq 0,30$, [Aden 01].

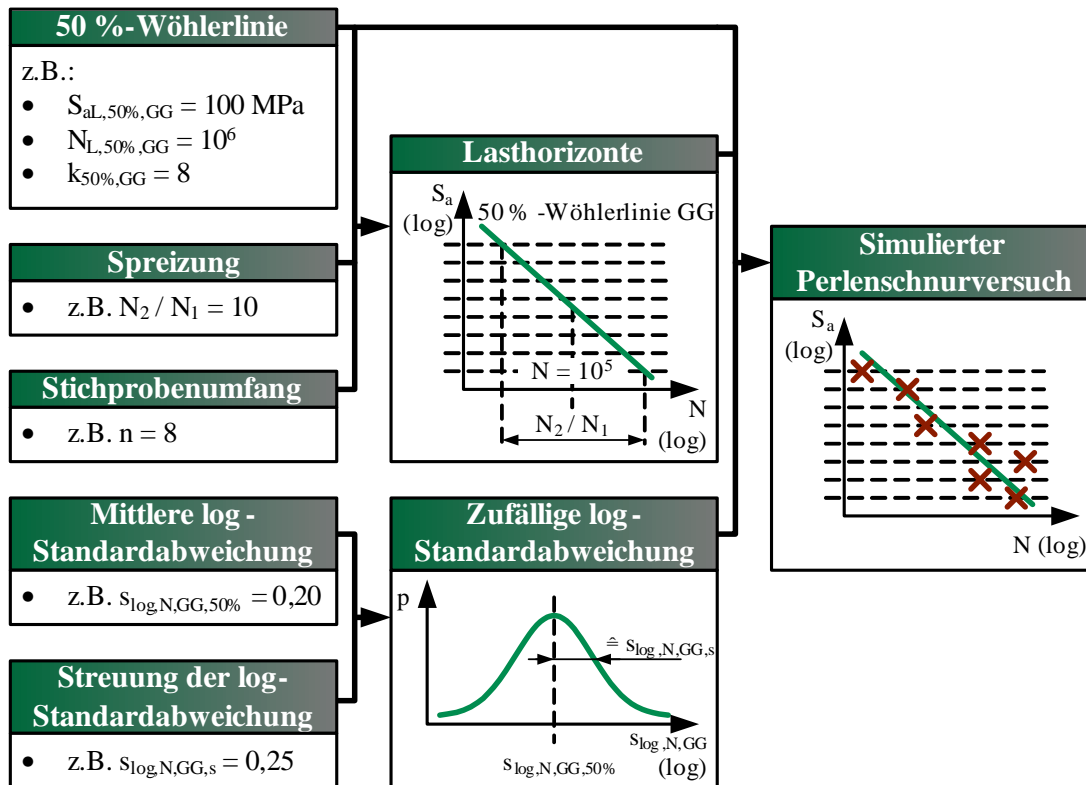


Abbildung 6.2: Generieren von Perlenschnurversuchen mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation

Ist die Verteilungsfunktion der logarithmischen Standardabweichung bekannt, dann kann sie in der Simulation realitätsnah, zufällig gewählt werden. In dieser Arbeit wird angenommen, dass die logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit selbst einer logarithmischen Normalverteilung folgt. Anders formuliert: Die im Simulationsmodell verwendete logarithmische Standardabweichung $s_{\log,N,GG}$ ist von Versuchsreihe zu Versuchsreihe unterschiedlich. Sie besitzt einen logarithmischen Mittelwert von $s_{\log,N,GG,50\%}$ (z.B. $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,20$), eine logarithmische Standardabweichung von $s_{\log,N,GG,s} = 0,25$ und folgt einer logarithmischen Normalverteilung, **Abbildung 6.2**. Diese Methode zur Berücksichtigung der logarithmischen Standardabweichung entspricht dem in [Müll 14] vorgeschlagenen Verfahren. Die Grundgesamtheit ist damit vollständig beschrieben.

Auf Basis der 50 %-Wöhlerlinie der Grundgesamtheit wird der Zeitfestigkeitsbereich in logarithmisch gleichabständige Prüfhorizonte gemäß dem zu Beginn der Prüfung zur Verfügung stehenden Stichprobenumfangs n eingeteilt, **Abbildung 6.2**. Der mittlere Lashorizont wird dort platziert, wo sich auf Basis der 50 %-Wöhlerlinie der Grundgesamtheit eine Lebensdauer von $N_{50\%,GG} = 10^5$ ergibt. Die beiden äußeren Lashorizonte besitzen bezüglich ihrer Schwingspielzahlen $N_{1,50\%,GG}$ und $N_{2,50\%,GG}$ eine Spreizung von N_2/N_1 , **Abbildung 6.2**. Die Spreizung wird in der Simulation variiert.

Auf jedem Lasthorizont wird eine gleichverteilte Zufallszahl gezogen. Die gleichverteilte Zufallszahl ist ein Maß für die Festigkeit der verwendeten Probe. Diese gleichverteilte Zufallszahl wird über die 50 %-Wöhlerlinie der Grundgesamtheit und die für diese Versuchsreihe gewählte, logarithmische Standardabweichung $s_{\log, N, GG}$ der Grundgesamtheit in eine logarithmisch-normalverteilte Zufallszahl umgerechnet. Die logarithmisch-normalverteilte Zufallszahl ist die erreichbare Schwingspielzahl, [Mart 11a].

Die simulierten Versuchsreihen werden wie in Kapitel 4.2.1 beschrieben ausgewertet und die geschätzten Parameter werden auf die Grundgesamtheit bezogen, vgl. Kapitel 3.4. Die mittlere Treffsicherheit (50 %-Quantil) und die Schätzgüte (Streuspanne), vgl. Kapitel 3.4, der folgenden Parameter werden bewertet:

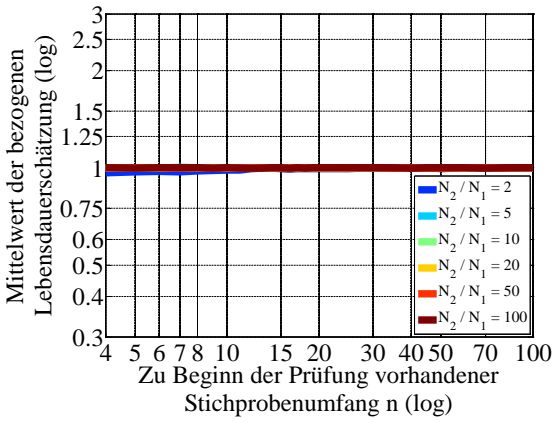
- Schwingspielzahl bei $N_{50\%, GG} = 2 \cdot 10^4$ (nahe Grenze zum Kurzzeitfestigkeitsbereich)
- Schwingspielzahl bei $N_{50\%, GG} = 1 \cdot 10^5$ (Schwerpunkt der Versuchsreihe)
- Schwingspielzahl bei $N_{50\%, GG} = 5 \cdot 10^5$ (nahe Grenze zum Langzeitfestigkeitsbereich)
- Neigung
- Logarithmische Standardabweichung

Der Lageparameter C der Zeitfestigkeitsgeraden ist für eine Bewertung ungeeignet. Er liegt weit außerhalb der untersuchten Versuchspunkte ($C = N(S_a = 1 \text{ MPa})$). Die sich dort ergebenden mittleren Treffsicherheiten und Schätzgüten sind für den Zeitfestigkeitsbereich nicht aussagekräftig.

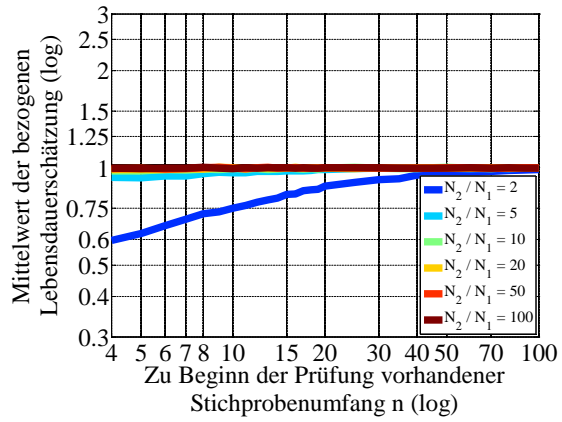
6.1.2 Ergebnisse der Lageschätzung (Schwingspielzahlschätzung)

Die Lageschätzung ist unabhängig von der vorgegebenen Neigung $k_{50\%, GG}$. Sie wird jedoch erkennbar beeinflusst durch die vorgegebene mittlere, logarithmische Standardabweichung $s_{\log, N, GG, 50\%}$ und die verwendete Spreizung N_2/N_1 , **Abbildung 6.3** und **Abbildung 6.4**.

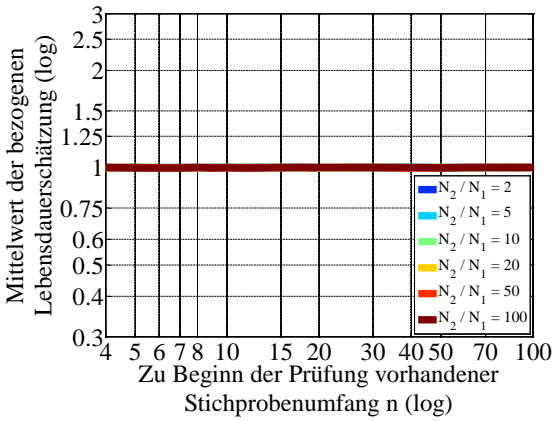
Mit dem Perlenschnurverfahren lässt sich die Lage der Wöhlerlinie unabhängig von der zugrundeliegenden logarithmischen Standardabweichung erwartungstreu schätzen, **Abbildung 6.3**. Kommen Spreizungen $N_2/N_1 < 10$ zum Einsatz, dann liegen die Horizonte eng beieinander und sie liefern sehr ähnliche Lebensdauern. Teilweise werden auf dem höheren Lasthorizont längere Lebensdauern vorhergesagt als auf dem niedrigeren. Das Ergebnis ist dann eine steigende Wöhlerlinie. Diese auch für die Praxis unsinnigen Versuchsreihen werden in der Simulation verworfen und nicht mit in die Auswertung einbezogen. Daher erscheint die Lageschätzung mit dem Perlenschnurverfahren für Spreizungen $N_2/N_1 < 10$ nicht erwartungstreu zu sein, **Abbildung 6.3**. Diese Abweichung von der Erwartungstreue ist jedoch nicht dem Perlenschnurverfahren anzulasten. Sie resultiert aus dem Verwerfen von Versuchsreihen, in denen steigende Wöhlerlinien geschätzt werden. Würde man auch diese Schätzungen zulassen, ergeben sich auch für Spreizungen $N_2/N_1 < 10$ erwartungstreue Lageschätzungen. Für Spreizungen $N_2/N_1 \geq 10$ ist die Über- bzw. Unterschätzung geringer als Faktor 1,02 ($\approx 2 \%$).



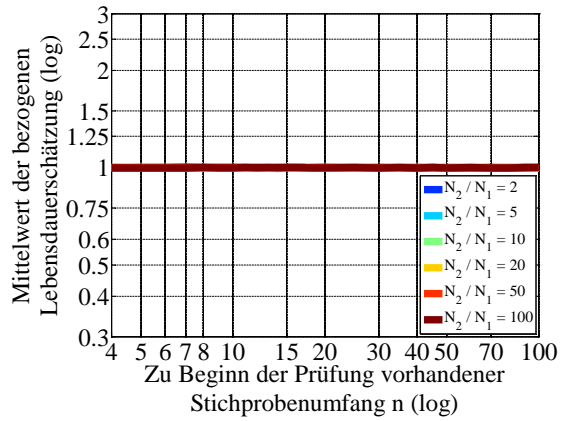
(a) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 10, N_{50\%,GG} = 2 \cdot 10^4$



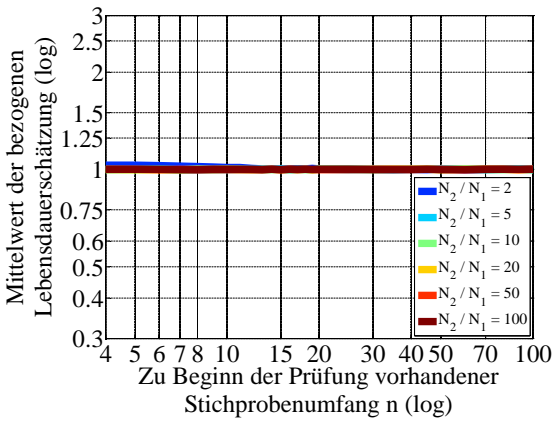
(b) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 30, N_{50\%,GG} = 2 \cdot 10^4$



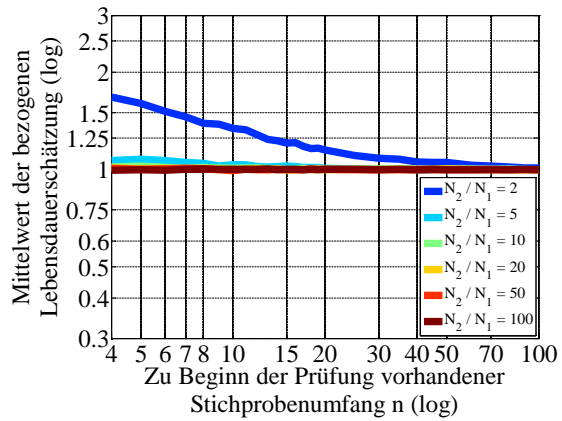
(c) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 10, N_{50\%,GG} = 1 \cdot 10^5$



(d) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 30, N_{50\%,GG} = 1 \cdot 10^5$

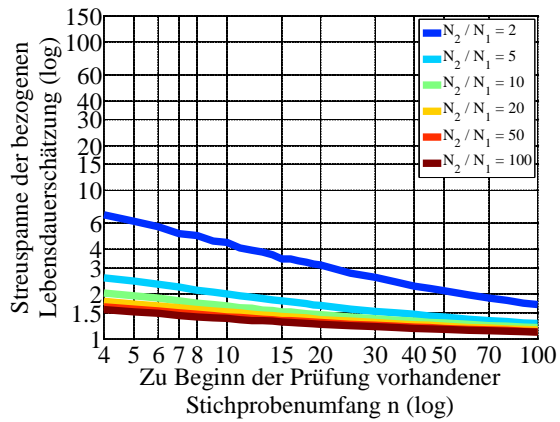


(e) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 10, N_{50\%,GG} = 5 \cdot 10^5$

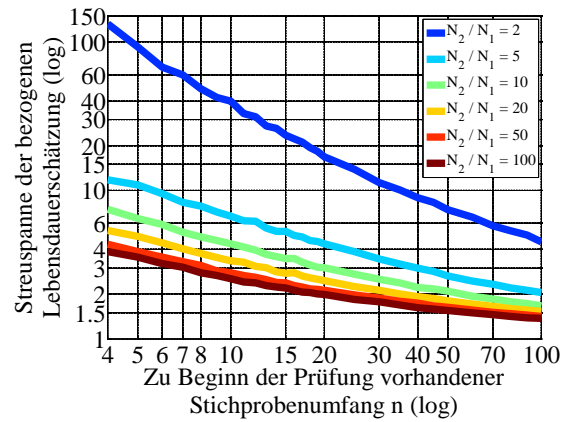


(f) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 30, N_{50\%,GG} = 5 \cdot 10^5$

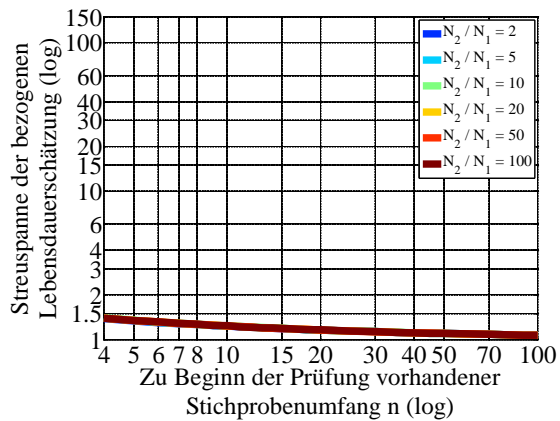
Abbildung 6.3: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Lageschätzungen für verschiedene mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,N,GG,50\%}$ und Lebensdauern $N_{50\%,GG}$



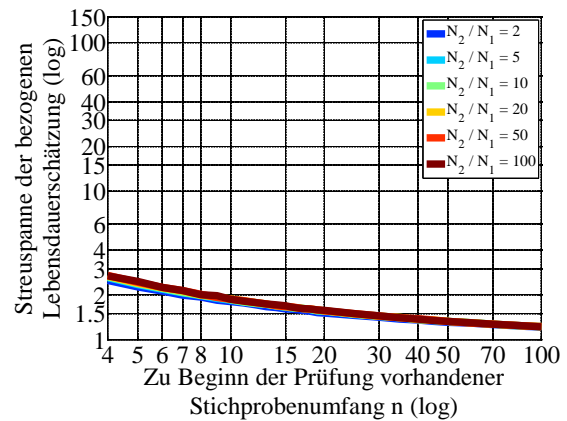
(a) $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0, 10, N_{50\%, GG} = 2 \cdot 10^4$



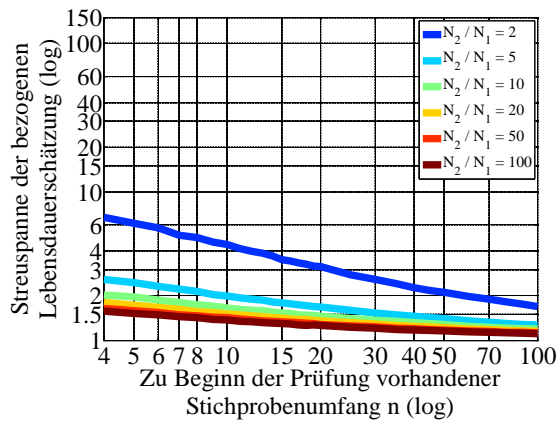
(b) $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0, 30, N_{50\%, GG} = 2 \cdot 10^4$



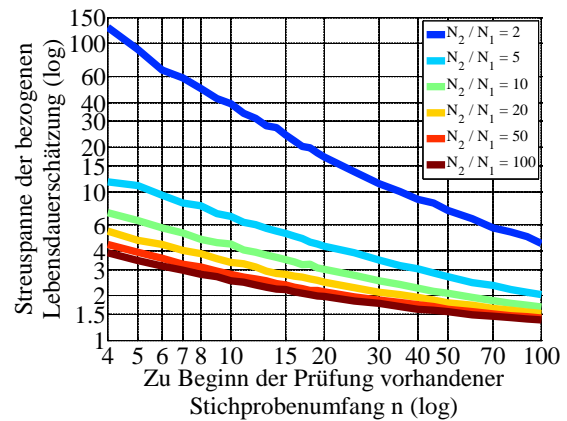
(c) $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0, 10, N_{50\%, GG} = 1 \cdot 10^5$



(d) $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0, 30, N_{50\%, GG} = 1 \cdot 10^5$



(e) $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0, 10, N_{50\%, GG} = 5 \cdot 10^5$



(f) $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0, 30, N_{50\%, GG} = 5 \cdot 10^5$

Abbildung 6.4: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Lageschätzungen für verschiedene mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log, N, GG, 50\%}$ und Lebensdauern $N_{50\%, GG}$

Im Einzelfall können die Ergebnisse erkennbar von der mittleren Treffsicherheit abweichen, was durch die Schätzgüte ausgedrückt werden kann, **Abbildung 6.4**. Die Schätzgüte der Lageschätzung, **Abbildung 6.4**, verdeutlicht, dass ein möglichst breites Verteilen der Proben (große Spreizung) über den gesamten Zeitfestigkeitsbereich erforderlich ist, damit hohe Schätzgüten auch bei kleinen Stichprobenumfängen, z.B. $n < 20$, erreicht werden können. Die Schätzgüte der Lageschätzung ist abhängig von der mittleren, logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,N,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, **Abbildung 6.4**. Je größer die logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit ist, desto unsicherer ist die Schätzung, vgl. auch Konfidenzintervalle für Mittelwertschätzungen aus normalverteilten Grundgesamtheiten, [Fahr 07].

Zur anschaulicheren Interpretation der Simulationsergebnisse seien die folgenden beiden Beispiele betrachtet.

Beispiel 1:

Ein Versuchingenieur steht vor der Aufgabe einen Perlenschnurversuch durchzuführen und möchte den mindestens benötigten Stichprobenumfang n abschätzen. Für die Versuchsergebnisse ist gefordert, dass sie zwischen $2 \cdot 10^4 < N < 5 \cdot 10^5$ in 80 % aller Fälle nicht mehr als Faktor 1,41 ($T = 1,41^2 = 2,00$) vom Mittelwert abweichen. Mit [Aden 01] hat der Versuchingenieur eine Vorabschätzung der mittleren, logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit für das vorliegende Bauteil zu $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,30$ vorgenommen. Aus **Abbildung 6.4** lässt sich entnehmen, dass bei einer Spreizung von $N_2/N_1 = 10$ ein Mindeststichprobenumfang von $n = 60$ erforderlich ist, um die Anforderungen zu erfüllen.

Beispiel 2:

Bei einem Mitbewerber wird das gleiche Bauteil wie in Beispiel 1 gefertigt. Aufgrund einer höheren Fertigungsqualität ist aus Erfahrungen bekannt, dass die mittlere, logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit für das vorliegende Bauteil zu $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,10$ vorabgeschätzt werden kann. In diesem Fall reichen unter sonst gleichen Bedingungen bereits $n = 5$ Proben für die gleiche Schätzgüte, **Abbildung 6.4**.

6.1.3 Ergebnisse der Neigungsschätzung

Die Neigungsschätzung ist unabhängig von der vorgegebenen Neigung $k_{50\%,GG}$. Spreizung N_2/N_1 und mittlere, logarithmische Standardabweichung $s_{\log,N,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit haben hingegen einen entscheidenden Einfluss, **Abbildung 6.5** und **Abbildung 6.6**.

Die Neigungsschätzung mit dem Perlenschnurverfahren erfolgt prinzipiell erwartungstreu, **Abbildung 6.5**. Bei Spreizungen $N_2/N_1 < 10$ und großen Streuungen der Grundgesamtheit kommt es zu einer tendenziellen Überschätzung der Neigung, **Abbildung 6.5 rechts**. Die Wöhlerlinie wird zu flach vorhergesagt, da Wöhlerlinien mit negativen Neigungen (steigende Wöhlerlinie) verworfen werden müssen, vgl. auch Kapitel 6.1.2.

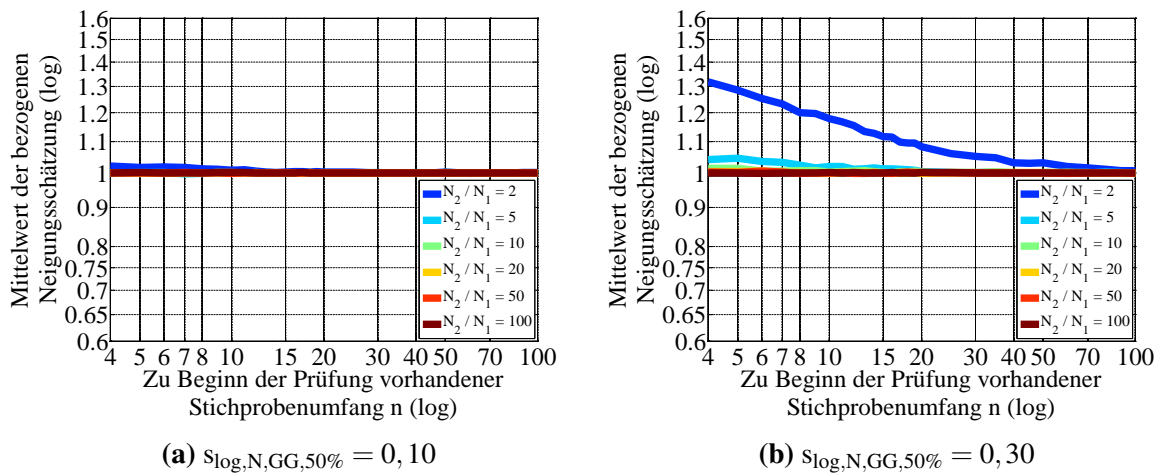


Abbildung 6.5: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Neigungsschätzung für verschiedene mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,N,GG,50\%}$

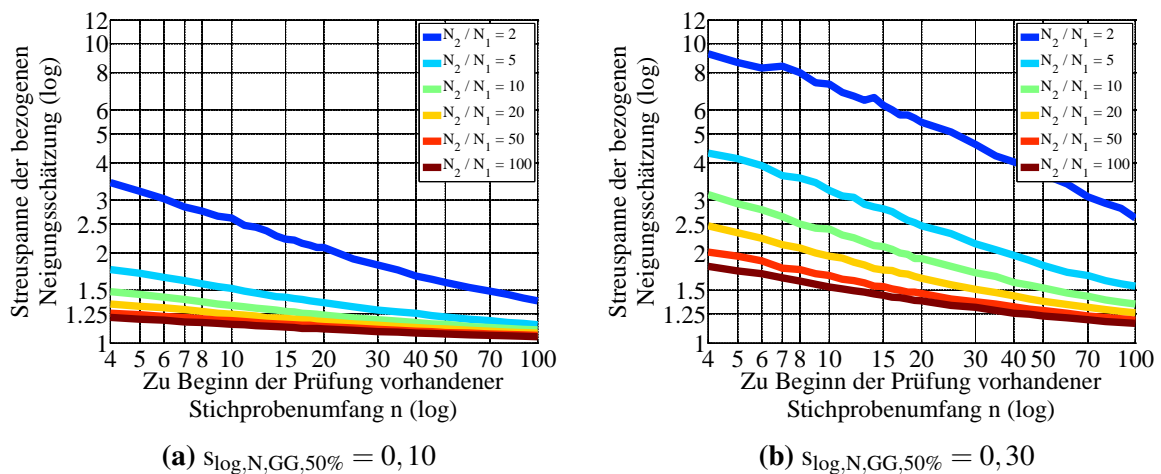


Abbildung 6.6: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Neigungsschätzung für verschiedene mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,N,GG,50\%}$

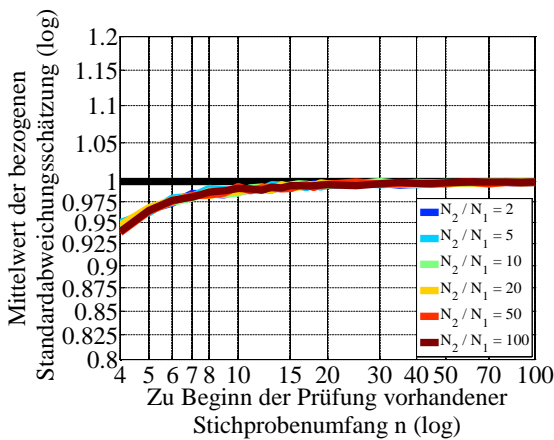
Die Neigung wird am besten vorhergesagt (niedrige Streuspanne), wenn die zur Verfügung stehenden Proben über den gesamten Zeitfestigkeitsbereich verteilt werden, **Abbildung 6.6**. Die Vorhersage ist umso unsicherer, je größer die mittlere, logarithmische Standardabweichung $s_{\log,N,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit ist, **Abbildung 6.6**.

Beispiel:

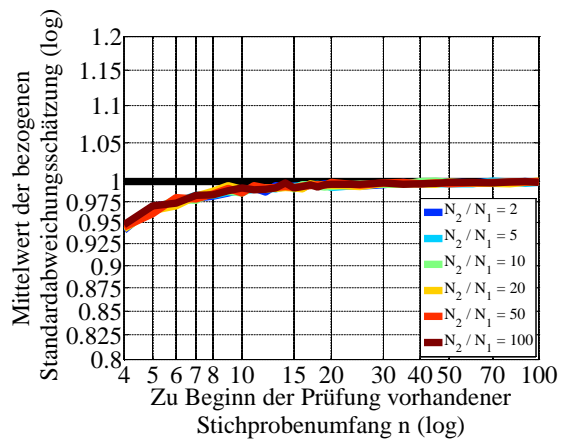
Mit einem Perlenschnurversuch soll die Neigung der Wöhlerlinie geschätzt werden. Dafür stehen $n = 20$ Proben zur Verfügung. Aus Erfahrungen ist bekannt, dass für die logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit ein Wert von $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,30$ zu erwarten ist. Wird der Versuch mit einer Spreizung von $N_2/N_1 = 10$ durchgeführt, dann ergibt sich nach **Abbildung 6.6 rechts** eine Streuspanne von $T = 1,91$. Das bedeutet, dass 80 % aller Neigungsauswertungen nicht mehr als $\text{Faktor} \sqrt{T} = \sqrt{1,91} = 1,38$ vom Wert der Grundgesamtheit abweichen werden.

6.1.4 Ergebnisse der Standardabweichungsschätzung

Die Schätzung der logarithmischen Standardabweichung erfolgt wie in Kapitel 4.2.1 beschrieben mit Gleichung (3.11), vgl. [Mart 11b]. Gleichung (3.11) ist erwartungstreu bezüglich des Erwartungswerts, [Mart 11b]. Wird ein Zufallsexperiment, hier der Perlenschnurversuch, wiederholt durchgeführt und die logarithmische Standardabweichung geschätzt, so lässt sich der Erwartungswert bestimmen, in dem das arithmetische Mittel der geschätzten, logarithmischen Standardabweichungen berechnet wird, [Fahr 07]. Der Erwartungswert stimmt im betrachteten Fall des Perlenschnurversuchs mit der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit überein (erwartungstreu bezüglich des Erwartungswerts), [Mart 11b]. Der Erwartungswert ist aber im allgemeinen ungleich dem 50 %-Quantil, das in dieser Arbeit für die mittlere Treffsicherheit betrachtet wird.

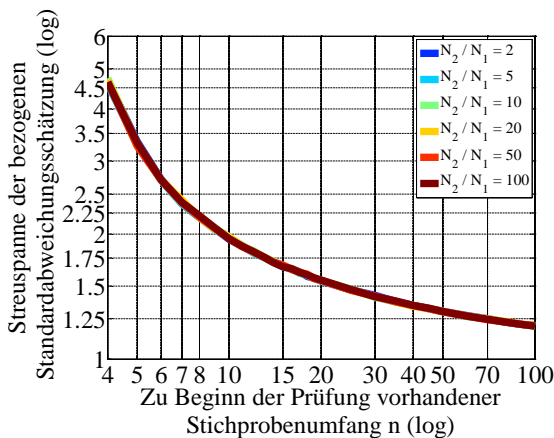


(a) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,10$

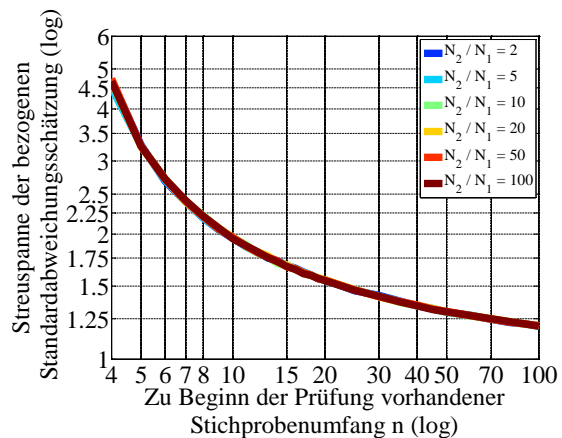


(b) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,30$

Abbildung 6.7: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,N,GG,50\%}$



(a) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,10$



(b) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,30$

Abbildung 6.8: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,N,GG,50\%}$

Abbildung 6.7 lässt sich entnehmen, dass die Schätzung der logarithmischen Standardabweichung bei Betrachtung des 50 %-Quantils asymptotisch erwartungstreu ist. Weiterhin ist die Schätzung unabhängig von der Neigung der Grundgesamtheit $k_{50\%,GG}$, der Spreizung N_2/N_1 und der mittleren, logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,N,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, **Abbildung 6.7** und **Abbildung 6.8**.

Ist die Spreizung gering, konzentrieren sich alle Versuchsergebnisse um eine Lebensdauer. Die Neigungsschätzung ist dann unsicher, **Abbildung 6.6**. Der dadurch verursachte Fehler bei der Verschiebung der Schwingspiele bleibt aber trotzdem gering, da nur über eine kurze Distanz verschoben werden muss. Mit zunehmender Spreizung müssen die Versuchspunkte zur Standardabweichungsschätzung über einen größeren Bereich verschoben werden. Gleichzeitig wird die Verschiebung aufgrund der zuverlässigeren Neigungsschätzung aber sicherer. Daraus ergibt sich eine mögliche Erklärung für die Unabhängigkeit der Standardabweichungsschätzung von der Spreizung.

Geschätzte Standardabweichungsquadrate aus einer normalverteilten Grundgesamtheit folgen der χ^2 -Verteilung, [Fahr 07]. Beim Berechnen der Streuspanne kürzt sich die Standardabweichung der Grundgesamtheit. Die Schätzgüte der Standardabweichungsschätzung wird unabhängig von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit.

Die Standardabweichungsschätzung ist bei Betrachtung des 50 %-Quantils asymptotisch erwartungstreu, **Abbildung 6.7**. Werden $n > 7$ Proben verwendet, dann wird die logarithmische Standardabweichung um weniger als Faktor 1,03 unterschätzt, **Abbildung 6.7**. Die Unterschätzung ist auch bei Stichprobenumfängen $n < 7$ derart gering, dass die Schätzung als praktisch erwartungstreu bezüglich des 50 %-Quantils eingestuft werden kann, **Abbildung 6.7**.

Insbesondere für kleine Stichprobenumfänge ist die Schätzung der logarithmischen Standardabweichung schwierig. Auch durch eine Erhöhung der Spreizung kann die Schätzgüte nicht verbessert werden, **Abbildung 6.8**. Günstigere Streuspannen lassen sich ausschließlich durch eine Erhöhung des Stichprobenumfangs erreichen, **Abbildung 6.8**.

Beispiel:

Bei Auswertung eines Perlenschnurversuchs mit $n = 20$ Proben hat sich eine logarithmische Standardabweichung der Stichprobe von $s_{\log,N,SP} = 0,15$ ergeben. Diese logarithmische Standardabweichung soll zur Umrechnung der Wöhlerlinie auf Ausfallwahrscheinlichkeiten $P_A < 50\%$ verwendet werden. Dazu wird von der logarithmischen Standardabweichung der Stichprobe gefordert, dass sie in 90 % aller Fälle auf der sicheren Seite liegt.

Da die Schätzung der logarithmischen Standardabweichung unabhängig von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit ist, kann **Abbildung 6.8** eine zugehörige Streuspanne von $T = 1,55$ entnommen werden. Die Streuspanne ist das Verhältnis aus 90 %- und 10 %-Quantil, vgl. Gleichung (3.16). Das 10 %- bzw. das 90 %-Quantil liegen Faktor \sqrt{T} vom 50 %-Quantil entfernt, vgl. **Abbildung 3.8**. Die logarithmische Standardabweichung der Stichprobe von $s_{\log,N,SP} = 0,15$ ist daher vor der Verwendung mit einem Sicherheitsfaktor von $\sqrt{T} = \sqrt{1,55} = 1,24$ zu multiplizieren, **Abbildung 6.8**, damit die geschätzte logarithmische Standardabweichung in 90 % aller Fälle auf der sicheren Seite liegt.

6.2 Horizontenverfahren

6.2.1 Aufbau des Simulationsmodells

Für eine erfolgreiche Anwendung des Horizontenverfahrens ist eine möglichst gute Abschätzung der zu erwartenden Wöhlerlinie bereits im Vorfeld des Versuchs notwendig. Durch die Vorabschätzung ergibt sich die Möglichkeit, die Lasthorizonte möglichst nahe den Übergangsbereichen zur Kurzzeit- bzw. Langzeitfestigkeit zu platzieren. Sie dürfen jedoch nicht in die Übergangsbereiche rutschen, da die Wöhlerlinie sonst zu flach geschätzt wird, [Mart 11a].

Im Folgenden wird der Einfluss einer Vorabschätzung durch rechnerische Wöhlerlinien, [Berg 99], [FKM 12], [Gude 99], [Marq 04], im Simulationsmodell abgebildet. Rechnerische Wöhlerlinien schätzen die Zeitfestigkeitsgerade in der Regel durch die Ecklastschwingspielzahl N_L , die Langzeitfestigkeit S_{aL} und die Neigung k für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 50\%$. Mit Hilfe der rechnerischen Wöhlerlinien erhält der Versuchingenieur ein Werkzeug zur Platzierung der Lasthorizonte für das Horizontenverfahren. Die rechnerischen Wöhlerlinien liefern eine annähernd erwartungstreue Schätzung, sind aber nicht zu vernachlässigenden Streuungen unterlegen, [Ellm 11]. Auswertungen der Datenbank Betriebsfestigkeit, [Ellm 11], ergeben die in **Tabelle 6.1** dargestellten Streuspannen für die geschätzten Wöhlerlinienparameter, vgl. auch Kapitel 4.4. An dieser Stelle sei erneut darauf hingewiesen, dass die Streuspannen der Neigungs- und Langzeitfestigkeitsschätzung Streuspannen in Lastrichtung darstellen, während es sich bei der Streuspanne der Ecklastschwingspielzahlschätzung um eine Streuspanne in Lebensdauerichtung handelt.

$T_k \updownarrow$	$T_{SaL} \updownarrow$	$T_{NL} \leftrightarrow$
1,8	1,5	4,5

Tabelle 6.1: Typische Streuspannen bei der Anwendung rechnerischer Wöhlerlinien für die Neigungsschätzung T_k , die Langzeitfestigkeitsschätzung T_{SaL} und die Ecklastschwingspielzahlschätzung T_{NL} , Daten aus [Ellm 11]

Unter der Annahme, dass die Parameterschätzungen der rechnerischen Wöhlerlinien einer logarithmischen Normalverteilung folgen, kann der Einfluss der rechnerischen Wöhlerlinien auf den Horizontenversuch wie nachfolgend beschrieben modelliert werden, **Abbildung 6.9**, vgl. auch [Müll 12]. Die rechnerischen Wöhlerlinien sollen im Mittel die Grundgesamtheit korrekt vorhersagen. Damit entsprechen ihre Mittelwerte denen der Grundgesamtheit für die Neigung $k_{50\%,GG}$, die Langzeitfestigkeit $S_{aL,50\%,GG}$ und die Ecklastschwingspielzahl $N_{L,50\%,GG}$, **Abbildung 6.9**. Um diese Mittelwerte streuen die Vorhersagen mit den Streuspannen für die Neigungsschätzung T_k , die Langzeitfestigkeitsschätzung T_{SaL} und die Ecklastschwingspielzahlschätzung T_{NL} , **Abbildung 6.9**.

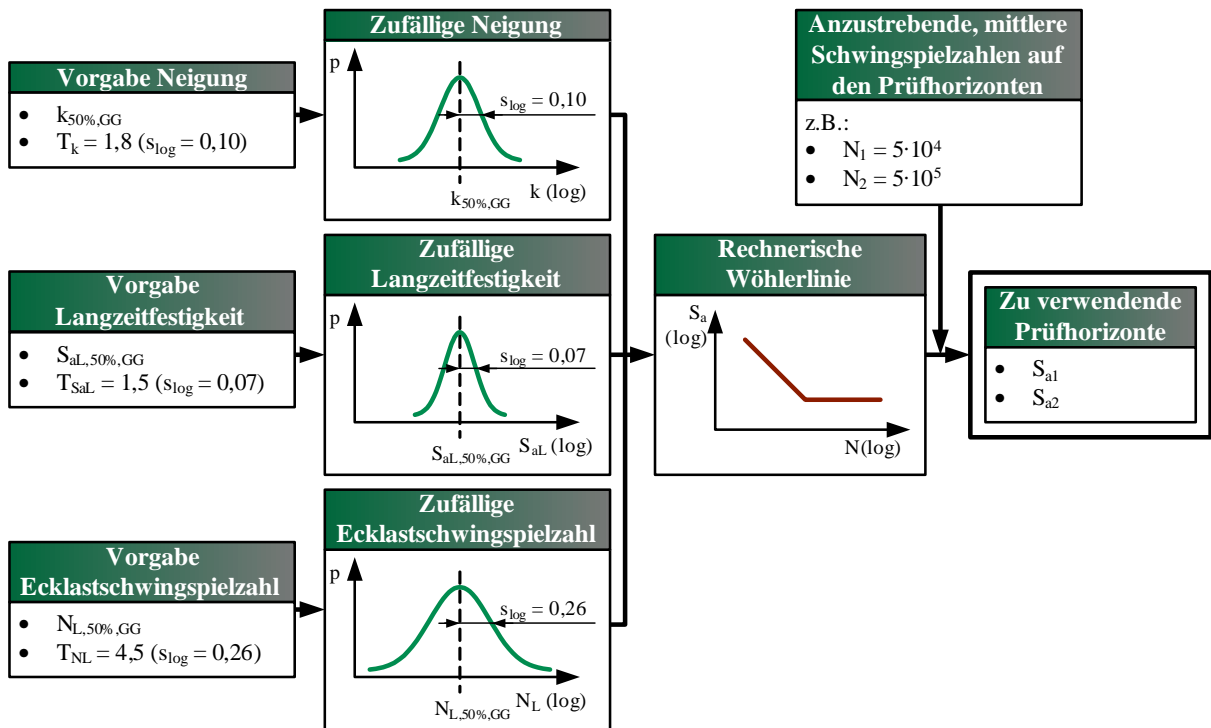


Abbildung 6.9: Berücksichtigung des Einflusses rechnerischer Wöhlerlinien im Simulationsmodell zum Horizontenverfahren

Aus der Vorgabe anzustrebender, mittlerer Schwingenspielzahlen auf den Prüfhorizonten errechnen sich mit zufälliger Neigung, zufälliger Langzeitfestigkeit und zufälliger Ecklastschwingspielzahl die zu verwendenden Prüfhorizonte, **Abbildung 6.9**.

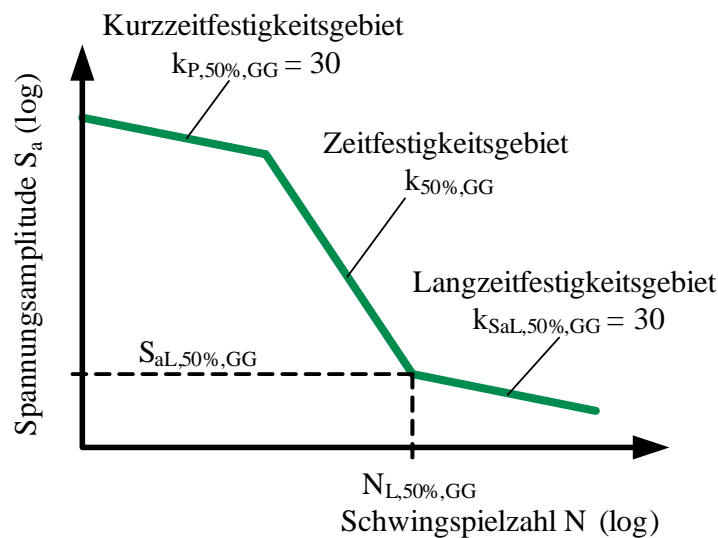


Abbildung 6.10: Trilineares Wöhlerlinienmodell der Grundgesamtheit

Aufgrund der hinterlegten Streuungen für die Parameterschätzungen der rechnerischen Wöhlerlinien können die Lasthorizonte im Einzelfall im Simulationsmodell auch in den Übergangsbereichen zur Kurzzeit- und/oder Langzeitfestigkeit platziert werden. In der Praxis würde dies der Versuchingenieur nicht oder erst spät merken. Die Neigungen der Wöhlerlinie der Grundge-

samtheit in den Übergangsbereichen müssen im Simulationsmodell mit abgebildet werden. Hier wird ein trilineares Modell gewählt, **Abbildung 6.10**. Die Neigung $k_{p,50\%,GG} = 30$ im Kurzzeitfestigkeitsgebiet ergibt sich aus der FKM-Richtlinie, [FKM 12], nach der zwischen $N = 1$ und $N = 10^4$ ein Festigkeitsabfall von 25 % anzusetzen ist (Begrenzung der Maximalamplitude durch 25 % der statischen Festigkeit).

Im Simulationsmodell soll für die Grundgesamtheit auch im Langzeitfestigkeitsgebiet eine Neigung von $k_{SaL,50\%,GG} = 30$ gelten. [Sons 05] zeigt, dass Neigungen von $k_{SaL,50\%,GG} = 30$ im Langzeitfestigkeitsgebiet beobachtet werden.

Analog zum Simulationsmodell des Perlenschnurverfahrens, Kapitel 6.1.1, wird die logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit $s_{\log,N,GG}$ realitätsnah mit Mittelwert $s_{\log,N,GG,50\%}$ und Streuung $s_{\log,N,s}$ abgebildet, **Abbildung 6.11**. Eine zufällig gewählte, logarithmische Standardabweichung soll für die gesamte Wöhlerlinie gelten.

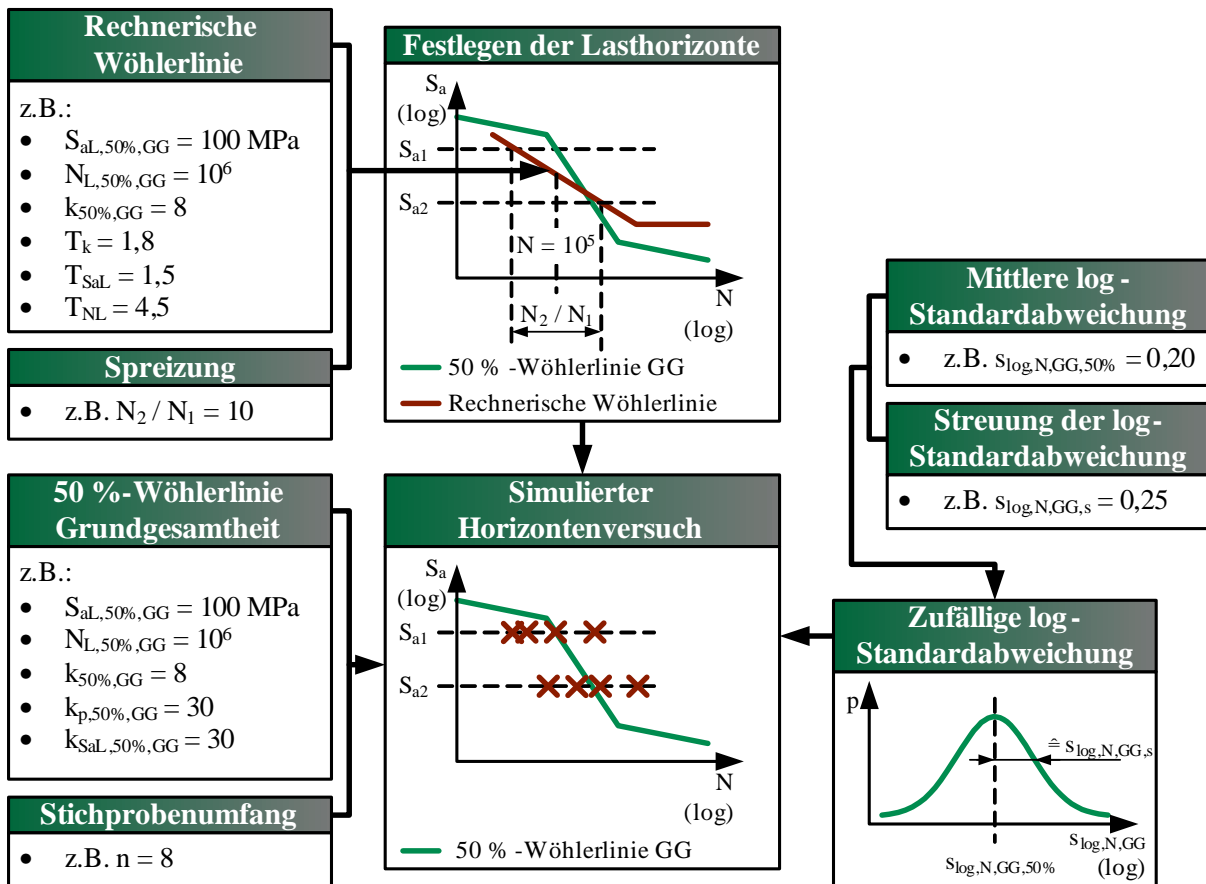


Abbildung 6.11: Generieren von Horizontenversuchen mit der Monte-Carlo-Simulation unter Einbeziehung des Einflusses rechnerischer Wöhlerlinien

Die beiden Versuchshorizonte werden abhängig von der rechnerischen Wöhlerlinie festgelegt, **Abbildung 6.11**. Die Spannungsamplitude, bei der sich mit der rechnerischen Wöhlerlinie $N = 10^5$ Schwingspiele ergeben, wird mit einer Konstanten multipliziert bzw. dividiert, um den oberen bzw. den unteren Spannungshorizont zu berechnen. Die rechnerischen Lebensdauern auf dem oberen und unteren Spannungshorizont stehen in einem Verhältnis N_2/N_1 zueinander, der sogenannten Spreizung, **Abbildung 6.11**. Bei logarithmischer Darstellung der Spannungs-

amplitude ergibt dies optisch äquidistante Abstände zur rechnerischen Lebensdauer $N = 10^5$. Die Spreizung wird in der Simulation variiert.

Zu Beginn der Prüfung steht ein Stichprobenumfang von n Proben zu Verfügung. Dieser Stichprobenumfang wird je zur Hälfte auf den oberen bzw. den unteren Lasthorizont verteilt. Ist der Stichprobenumfang n ungerade, erhält hier der obere Lasthorizont S_{a1} eine Probe mehr als der untere, $n_1 \geq n_2$.

Das Generieren der Schwingenspielzahlen erfolgt auf beiden Lasthorizonten identisch. Für jede Probe wird eine gleichverteilte Zufallszahl gezogen, die ein Maß der Festigkeit darstellt. Über die 50 %-Wöhlerlinie der Grundgesamtheit in Kombination mit der aktuell vorliegenden, logarithmischen Standardabweichung $s_{\log, N, GG}$ der Grundgesamtheit, werden die gleichverteilten Zufallszahlen in logarithmisch-normalverteilte Zufallszahlen auf dem betrachteten Lasthorizont umgerechnet, **Abbildung 6.11**. Diese logarithmisch-normalverteilte Zufallszahlen sind die Schwingenspielzahlen auf den Lasthorizonten.

Die generierten Versuche werden wie in Kapitel 4.2.2 beschrieben ausgewertet. Die berechneten Parameter lassen sich auf die zugehörigen Werte der Grundgesamtheit beziehen.

6.2.2 Ergebnisse unter Berücksichtigung rechnerischer Wöhlerlinien bei der Versuchsplanung

Aufgrund der nicht zu vernachlässigenden Streuungen der rechnerischen Wöhlerlinien werden häufig einer oder beide Prüfhorizonte in die Übergangsbereiche gelegt, **Abbildung 6.12**. Je größer die Spreizung N_2/N_1 ist, desto häufiger finden Platzierungen in den Übergangsbereichen statt, **Abbildung 6.12**. Ist die Wöhlerlinie flach, dann ist der überstrichene Lastbereich bei gleichem Schwingenspielzahlbereich in der Zeitfestigkeit kleiner als bei einer steilen Wöhlerlinie. Damit wird die Gefahr einer Lasthorizontplatzierung im Übergangsbereich erhöht, **Abbildung 6.12**. Durch das Einbeziehen dieser unzulässig platzierten Versuche in die Auswertung, wird die Neigung der Wöhlerlinie zu flach geschätzt, **Abbildung 6.13**.

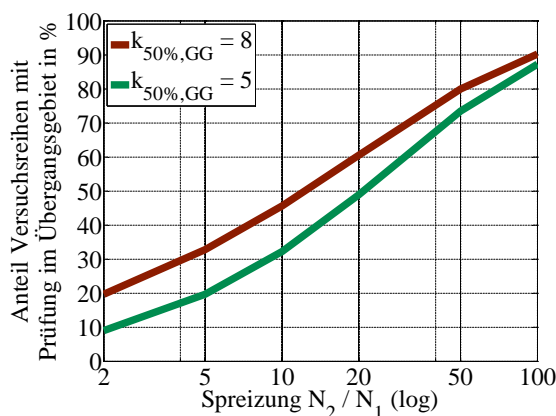
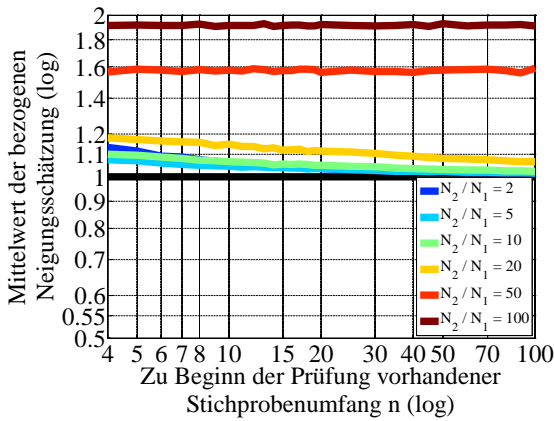
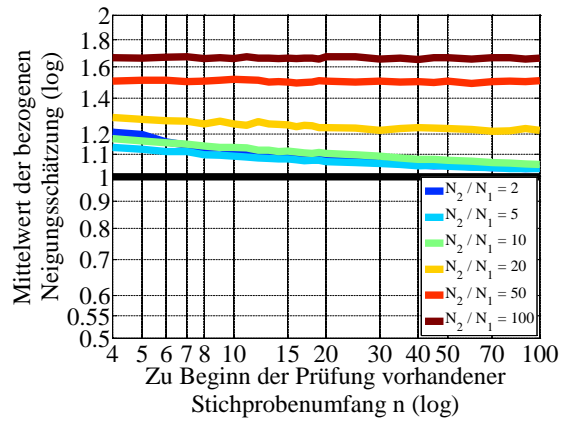


Abbildung 6.12: Anteil von Versuchsreihen mit platzierten Versuchshorizonten in den Übergangsbereichen

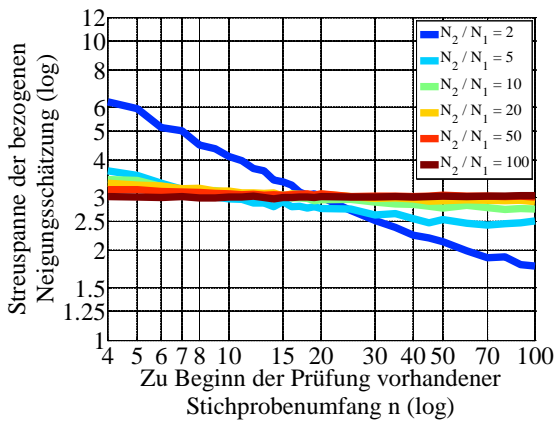


(a) $k_{50\%,GG} = 5, s_{\log,N,GG,50\%} = 0,20$

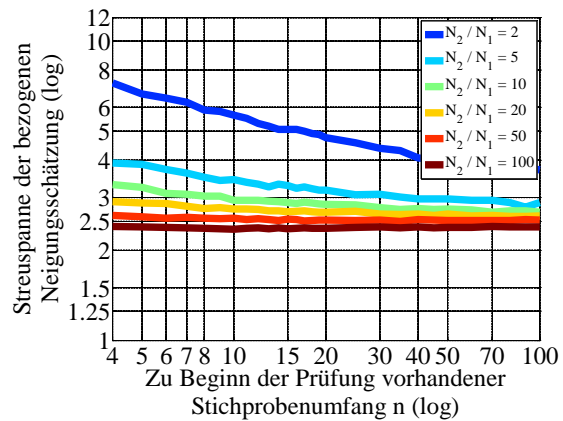


(b) $k_{50\%,GG} = 8, s_{\log,N,GG,50\%} = 0,20$

Abbildung 6.13: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Neigungsschätzung unter Berücksichtigung des Einflusses rechnerischer Wöhlerlinien in der Versuchsplanung für verschiedene Neigungen $k_{50\%,GG}$



(a) $k_{50\%,GG} = 5, s_{\log,N,GG,50\%} = 0,20$



(b) $k_{50\%,GG} = 8, s_{\log,N,GG,50\%} = 0,20$

Abbildung 6.14: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Neigungsschätzung unter Berücksichtigung des Einflusses rechnerischer Wöhlerlinien in der Versuchsplanung für verschiedene Neigungen $k_{50\%,GG}$

Auch bei vergleichsweise steilen Wöhlerlinien, z.B. $k_{50\%,GG} = 5$, kommt es bereits bei sehr kleinen Spreizungen von $N_2/N_1 = 2$ in circa 10 % aller Fälle zur Platzierung von Prüfhorizonten in den Übergangsbereichen, **Abbildung 6.12**. Die Wöhlerlinienneigung wird dadurch überschätzt. Der Fehler nimmt mit wachsender Spreizung zu, **Abbildung 6.13**. Im Falle flacher Wöhlerlinien ist die Auswirkung des Fehlers durch das Platzieren von Horizonten im Übergangsbereich im Mittel geringer, **Abbildung 6.13**. Eine Begründung dafür ist, dass flache Wöhlerlinien den Neigungen in den Übergangsbereichen ähnlicher sind (Extrembeispiel Zeitfestigkeitsgerade besitzt Neigung der Übergangsbereiche). Gelingt es, in mindestens 50 % aller Fälle die Versuchshorizonte im reinen Zeitfestigkeitsbereich zu platzieren, dann ist die Neigungsschätzung zumindest asymptotisch erwartungstreu, **Abbildung 6.13**. Begründet ist dies durch die mit dem Stichprobenumfang zunehmende Schätzgüte von im reinen Zeitfestigkeitsbereich platzierten Lasthorizonten.

Durch das Platzieren von Lasthorizonten in den Übergangsbereichen ergeben sich aufgrund der erhöhten Variantenvielfalt der Versuchsergebnisse ungünstige Schätzgüten, **Abbildung 6.14**. Die Schätzgüten werden bei ausreichend großen Spreizungen unabhängig vom Stichprobenumfang und von der Spreizung selbst.

Rechnerische Wöhlerlinien sind für die Versuchsplanung im Horizontenverfahren aufgrund der dargestellten Problematik ungeeignet. Das Horizontenverfahren lässt sich nur bei ausreichender Kenntnis der Wöhlerlinie sinnvoll anwenden. Dazu sind z.B. Erfahrungen und/oder Vorversuche, die z.B. nach dem Perlenschnurverfahren organisiert werden, notwendig.

6.2.3 Ergebnisse unter Berücksichtigung von detaillierten Vorkenntnissen bei der Versuchsplanung

Im vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, dass rechnerische Wöhlerlinien für die Versuchsplanung im Horizontenverfahren ungeeignet sind. Das Horizontenverfahren kann nur sinnvoll angewendet werden, wenn ausreichende Erfahrungen vorliegen. Die im Folgenden dargestellten Ergebnisse basieren auf der Annahme, dass ausreichende Kenntnisse über die Wöhlerlinie vorhanden sind. Das bedeutet eine ideale Platzierung der Lasthorizonte auf Basis der 50 %-Wöhlerlinie der Grundgesamtheit, da angenommen wird, dass diese aus Erfahrungen oder Vorversuchen ausreichend bekannt ist. Weiterhin wird unterstellt, dass die logarithmische Standardabweichung $s_{\log, N, GG}$ ausreichend gut durch Erfahrungen oder Vorversuche ermittelt wurde. Die logarithmische Standardabweichung der logarithmischen Standardabweichung wird daher zu $s_{\log, N, s} = 0$ gesetzt. Dies stellt den Optimalfall dar, wie er prinzipiell auch in [Mart 11a] und [Mart 11b] vorgestellt wird.

Wie auch bei den Untersuchungen zum Perlenschnurverfahren werden die mittlere Treffsicherheit (50 %-Quantil) und die Schätzgüte (Streuspanne) der folgenden Parameter bewertet:

- Schwingenspielzahl bei $N_{50\%, GG} = 2 \cdot 10^4$ (nahe Grenze zum Kurzzeitfestigkeitsbereich)
- Schwingenspielzahl bei $N_{50\%, GG} = 1 \cdot 10^5$ (Schwerpunkt der Versuchsreihe)
- Schwingenspielzahl bei $N_{50\%, GG} = 5 \cdot 10^5$ (nahe Grenze zum Langzeitfestigkeitsbereich)
- Neigung
- Logarithmische Standardabweichung

6.2.3.1 Ergebnisse der Lageschätzung (Schwingspielzschätzung)

Kann ausgeschlossen werden, dass Lasthorizonte im Übergangsbereich platziert werden, dann ist die Lageschätzung unabhängig von der vorgegebenen Neigung $k_{50\%,GG}$. Die vorgegebene mittlere, logarithmische Standardabweichung $s_{\log,N,GG,50\%}$ und die verwendete Spreizung N_2/N_1 haben jedoch einen erkennbaren Einfluss, **Abbildung 6.15** und **Abbildung 6.16**.

Wie auch beim Perlenschnurverfahren erfolgt die Lageschätzung mit dem Horizontenverfahren erwartungstreu, **Abbildung 6.15**. Analog zum Perlenschnurverfahren kann es bei zu enger Platzierung der Lasthorizonte (kleine Spreizungen N_2/N_1) dazu kommen, dass steigende Wöhlerlinien vorhergesagt werden. Diese steigenden Wöhlerlinien werden wieder verworfen und nicht in die Auswertung mit einbezogen. Daher erscheint die Lageschätzung für Spreizungen $N_2/N_1 < 5$ nicht erwartungstreu. Dieses Verhalten ist kein Nachteil des Horizontenverfahrens sondern dem Aussortieren von Schätzungen mit steigender Wöhlerlinie geschuldet.

Bei zu klein gewählter Spreizung kommt es zu einer Unterschätzung der Lebensdauern links und zur einer Überschätzung rechts vom Schwerpunkt der Versuchsreihe, **Abbildung 6.15**. Die Wöhlerlinie wird zu flach vorhergesagt.

Die Darstellung der Schätzgüte in **Abbildung 6.16** verdeutlicht, dass eine möglichst große Spreizung Verwendung finden sollte. Durch das Platzieren der Versuche weit vom Schwerpunkt entfernt ergeben sich auch für vergleichsweise kleine Stichprobenumfänge kleine Streuspannen.

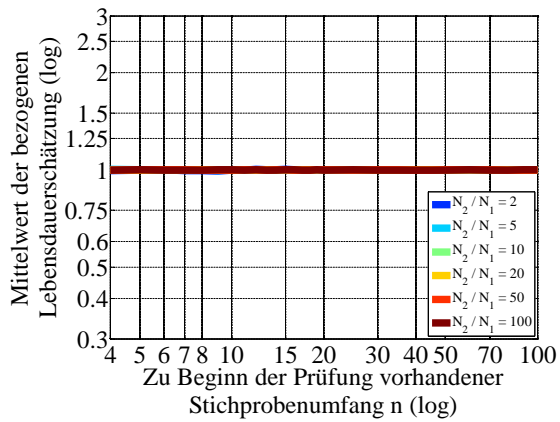
Zur anschaulicheren Interpretation der Simulationsergebnisse sollen die gleichen Beispiele wie bei der Untersuchung des Perlenschnurverfahrens, Kapitel 6.1, betrachtet werden.

Beispiel 1:

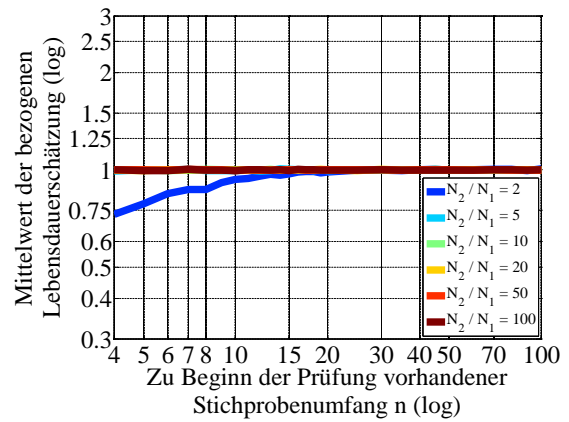
Ein Versuchsingenieur steht vor der Aufgabe einen Horizontenversuch durchzuführen und möchte den mindestens benötigten Stichprobenumfang n abschätzen. Für die Versuchsergebnisse ist gefordert, dass sie zwischen $2 \cdot 10^4 < N < 5 \cdot 10^5$ in 80 % aller Fälle nicht mehr als Faktor 1,41 ($T = 1,41^2 = 2,00$) vom Mittelwert abweichen. Mit [Aden 01] hat der Versuchsingenieur eine Vorabschätzung der mittleren, logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit für das vorliegende Bauteil zu $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,30$ vorgenommen. Aus **Abbildung 6.16** lässt sich entnehmen, dass bei einer Spreizung von $N_2/N_1 = 10$ ein Mindeststichprobenumfang von $n = 19$ erforderlich ist, um die Anforderungen zu erfüllen.

Beispiel 2:

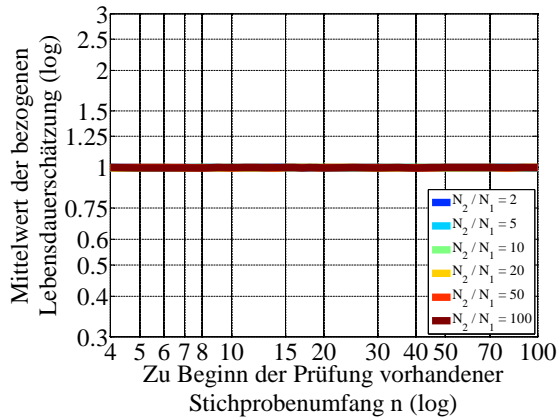
Bei einem Mitbewerber wird das gleiche Bauteil wie in Beispiel 1 gefertigt. Aufgrund einer höheren Fertigungsqualität ist aus Erfahrungen bekannt, dass die mittlere, logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit für das vorliegende Bauteil zu $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,10$ vorabgeschätzt werden kann. In diesem Fall reichen unter sonst gleichen Bedingungen bereits $n = 4$ Proben für die gleiche Schätzgüte, **Abbildung 6.16**.



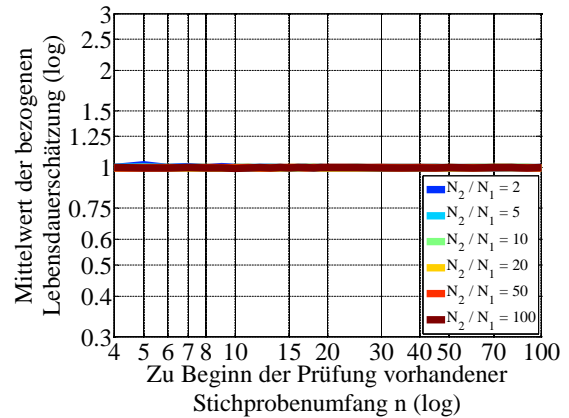
(a) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 10, N_{50\%,GG} = 2 \cdot 10^4$



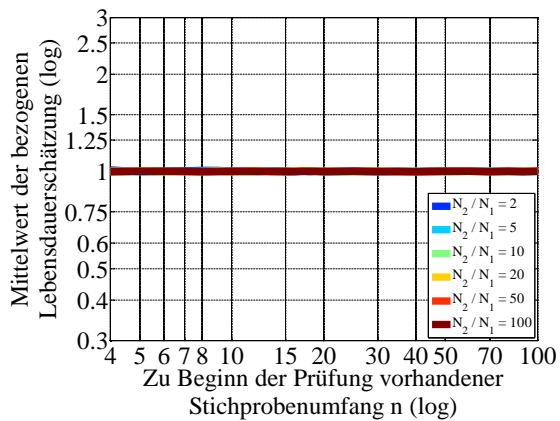
(b) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 30, N_{50\%,GG} = 2 \cdot 10^4$



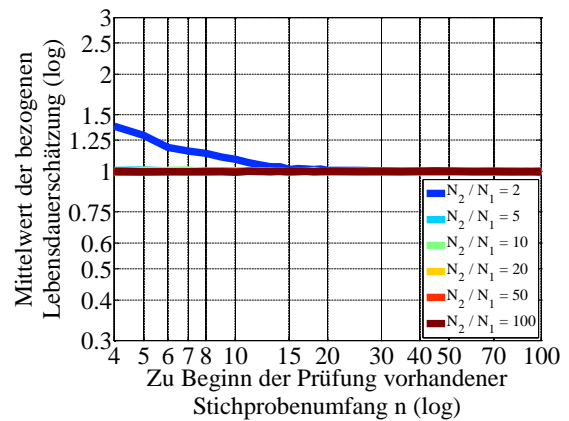
(c) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 10, N_{50\%,GG} = 1 \cdot 10^5$



(d) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 30, N_{50\%,GG} = 1 \cdot 10^5$

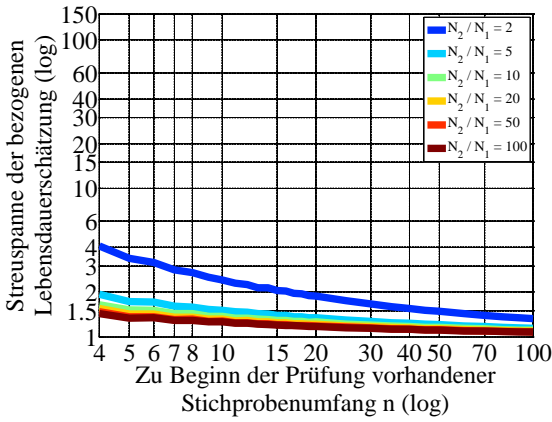


(e) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 10, N_{50\%,GG} = 5 \cdot 10^5$

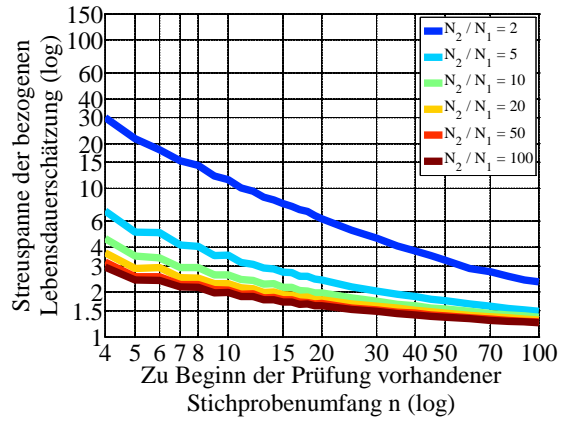


(f) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 30, N_{50\%,GG} = 5 \cdot 10^5$

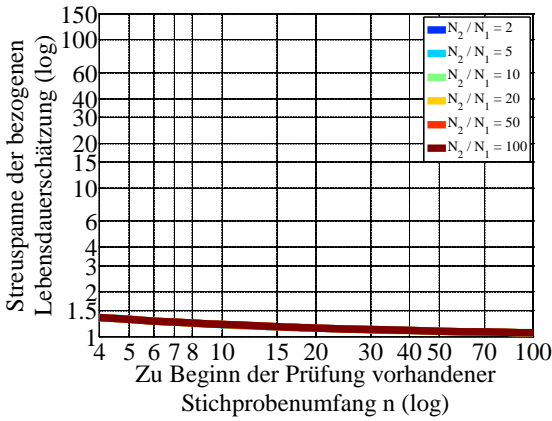
Abbildung 6.15: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Lageschätzungen für verschiedene mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,N,GG,50\%}$ und Lebensdauern $N_{50\%,GG}$



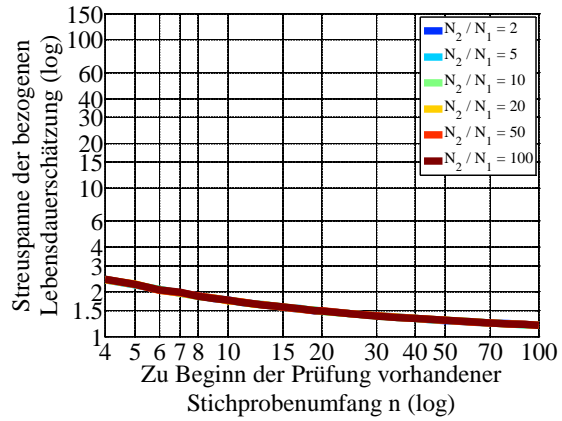
(a) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 10, N_{50\%,GG} = 2 \cdot 10^4$



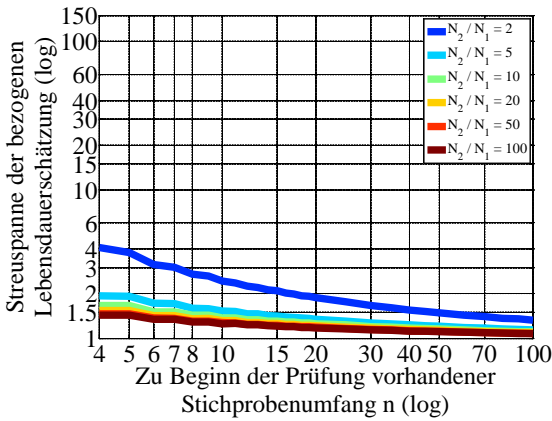
(b) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 30, N_{50\%,GG} = 2 \cdot 10^4$



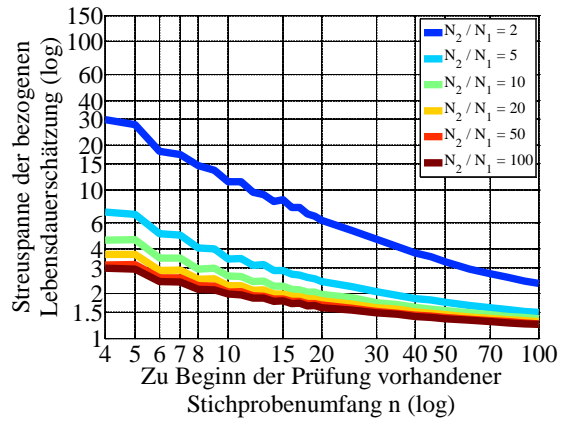
(c) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 10, N_{50\%,GG} = 1 \cdot 10^5$



(d) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 30, N_{50\%,GG} = 1 \cdot 10^5$



(e) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 10, N_{50\%,GG} = 5 \cdot 10^5$



(f) $s_{\log,N,GG,50\%} = 0, 30, N_{50\%,GG} = 5 \cdot 10^5$

Abbildung 6.16: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Lageschätzungen für verschiedene mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,N,GG,50\%}$ und Lebensdauern $N_{50\%,GG}$

6.2.3.2 Ergebnisse der Neigungsschätzung

Analog zur Lageschätzung ist die Neigungsschätzung beim Horizontenverfahren unabhängig von der vorgegebenen Neigung $k_{50\%,GG}$ der Grundgesamtheit, wird aber von der logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,N,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit und der Spreizung N_2/N_1 beeinflusst, **Abbildung 6.17** und **Abbildung 6.18**.

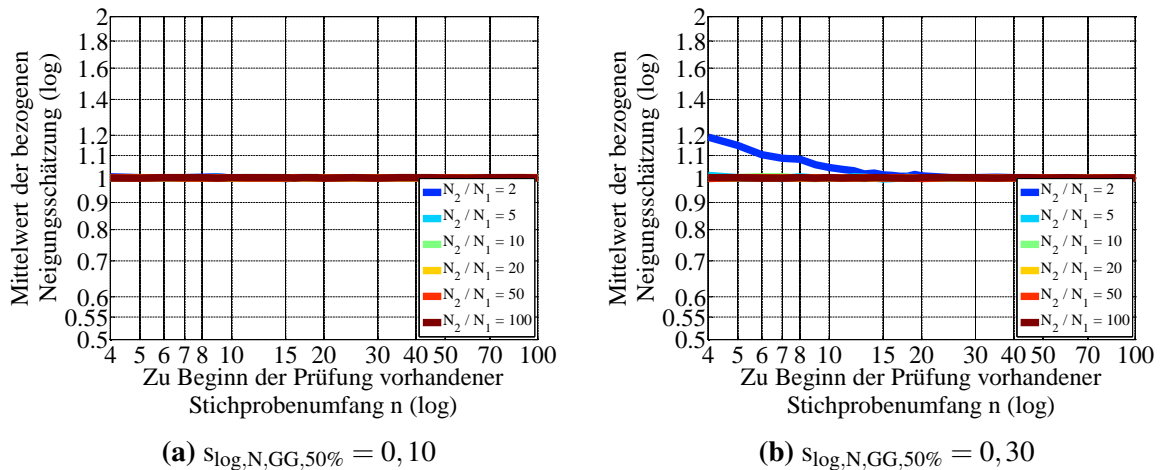


Abbildung 6.17: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Neigungsschätzungen für verschiedene mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,N,GG,50\%}$

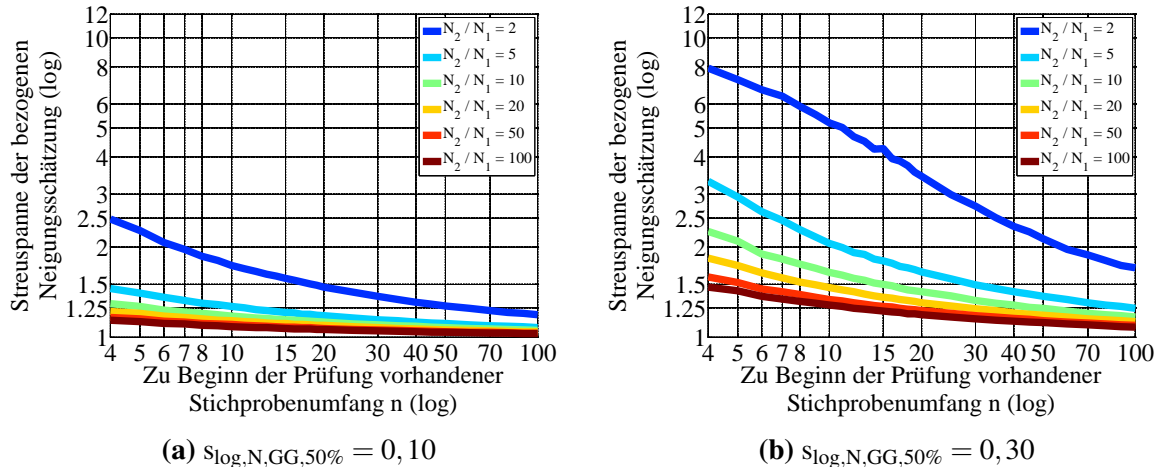


Abbildung 6.18: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Neigungsschätzungen für verschiedene mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,N,GG,50\%}$

Aufgrund der Streuung der Versuchsergebnisse werden bei eng platzierten Lasthorizonten teilweise Neigungen kleiner Null berechnet, so dass diese Versuchsreihen verworfen werden müssen (steigende Wöhlerlinie). Diese fehlenden Versuchsreihen provozieren eine tendenzielle Überschätzung der Neigung im Horizontenversuch für Spreizungen $N_2/N_1 < 5$. Hier sei erneut darauf hingewiesen, dass diese Beobachtung durch das gezielte Aussortieren von in der Praxis nicht verwendbaren Ergebnissen verursacht wird und kein Nachteil des Horizontenverfahrens darstellt. Für Spreizungen $N_2/N_1 \geq 5$ erfolgt die Neigungsschätzung erwartungstreu, **Abbildung 6.17**.

Durch Verwendung einer großen Spreizung werden die Lasthorizonte weit entfernt vom Schwerpunkt der Versuchsreihe platziert, wodurch sich eine hohe Schätzgüte erreichen lässt, **Abbildung 6.18**. Erwartungsgemäß ist die Vorhersage umso unsicherer, je größer die zugrundeliegende, logarithmische Standardabweichung $s_{\log,N,GG,50\%}$ ist.

Beispiel:

Mit einem Horizontenversuch soll die Neigung der Wöhlerlinie geschätzt werden. Dafür stehen $n = 20$ Proben zur Verfügung. Aus Erfahrungen ist bekannt, dass für die logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit ein Wert von $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,30$ zu erwarten ist. Wird der Versuch mit einer Spreizung von $N_2/N_1 = 10$ durchgeführt, dann ergibt sich nach **Abbildung 6.18 rechts** eine Streuspanne von $T = 1,42$. Das bedeutet, dass 80 % aller Neigungsauswertungen nicht mehr als Faktor $\sqrt{T} = \sqrt{1,42} = 1,19$ vom Wert der Grundgesamtheit abweichen werden.

6.2.3.3 Ergebnisse der Standardabweichungsschätzung

Beim Horizontenverfahren erfolgt die Schätzung der Standardabweichung für jeden Lasthorizont separat mit Gleichung (3.10), [Mart 11b]. Analog zum Perlenschnurverfahren ist diese Abschätzgleichung erwartungstreu bezüglich des Erwartungswerts, [Mart 11b]. Der Erwartungswert ist im Allgemeinen vom 50 %-Quantil verschieden, das in der vorliegenden Arbeit zur Bewertung der mittleren Treffsicherheit eingesetzt wird.

Aufgrund der separaten Schätzung der logarithmischen Standardabweichung für jeden Lasthorizont können die Spreizung und die vorgegebene Neigung keinen Einfluss nehmen. Die Schätzung der logarithmischen Standardabweichung ist zusätzlich unabhängig von der vorgegebene logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,N,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, **Abbildung 6.19** und **Abbildung 6.20**. Dies erklärt sich aus der χ^2 -Verteilung, die sich bei geschätzten Standardabweichungsquadraten aus normalverteilten Grundgesamtheiten ergibt, [Fahr 07].

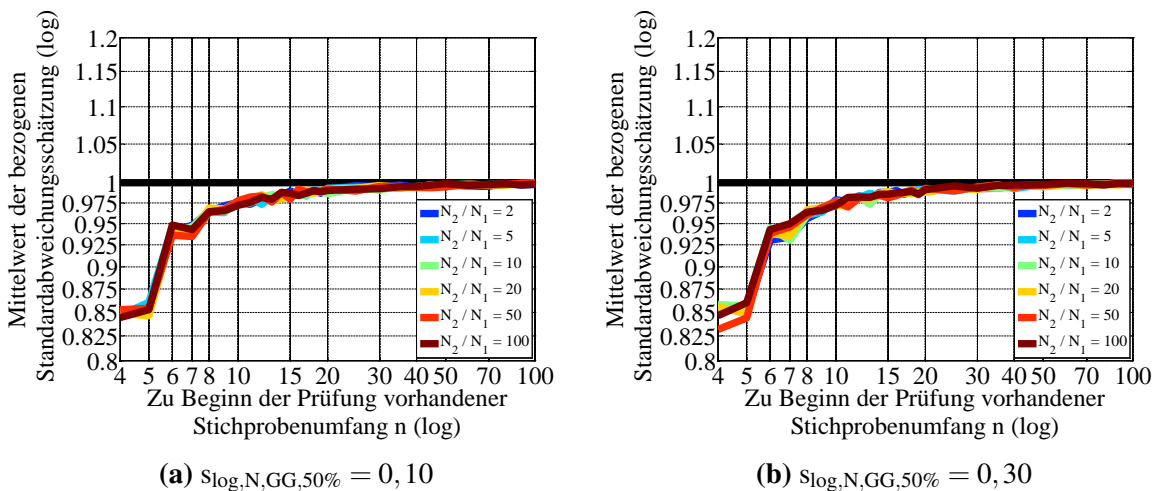


Abbildung 6.19: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Standardabweichungsschätzungen für verschiedene mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,N,GG,50\%}$ auf dem unteren Lasthorizont S_{a2}

Durch die separate Schätzung je Lasthorizont muss der zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfang n auf die Lasthorizonte aufgeteilt werden. Bei den hier verwendeten zwei Lasthorizonten steht damit jeweils nur die Hälfte des Gesamtstichprobenumfangs pro Lasthorizont zur Verfügung. Daraus begründen sich die in **Abbildung 6.19** und **Abbildung 6.20** zu erkennenden, getrepteten Verläufe. Um auf einem Lasthorizont eine Erhöhung des Stichprobenumfangs um $\Delta n = 1$ zu erreichen, muss der Gesamtstichprobenumfang um $\Delta n = 2$ erhöht werden.

Bei Betrachtung des 50 %-Quantils ist die Schätzung der logarithmischen Standardabweichung asymptotisch erwartungstreu, **Abbildung 6.19**. Stehen $n \geq 10$ Proben zu Beginn der Prüfung zur Verfügung, dann ist die Unterschätzung im Mittel kleiner als Faktor 1,03, **Abbildung 6.19**. Eine Verwendung von $n < 10$ Proben ist zu vermeiden, da die Unterschätzung aufgrund der Aufteilung der Proben auf die Lasthorizonte dann bis zu Faktor 1,18 betragen kann, **Abbildung 6.19**.

Die Schätzung der logarithmischen Standardabweichung ist für kleine Stichprobenumfänge schwierig. Die Problematik wird beim Horizontenverfahren durch die Aufteilung des zur Verfügung stehenden Stichprobenumfangs auf die Lasthorizonte zusätzlich verschärft. Günstige Streuspannen lassen sich ausschließlich durch eine Erhöhung des Stichprobenumfangs erreichen, **Abbildung 6.20**.

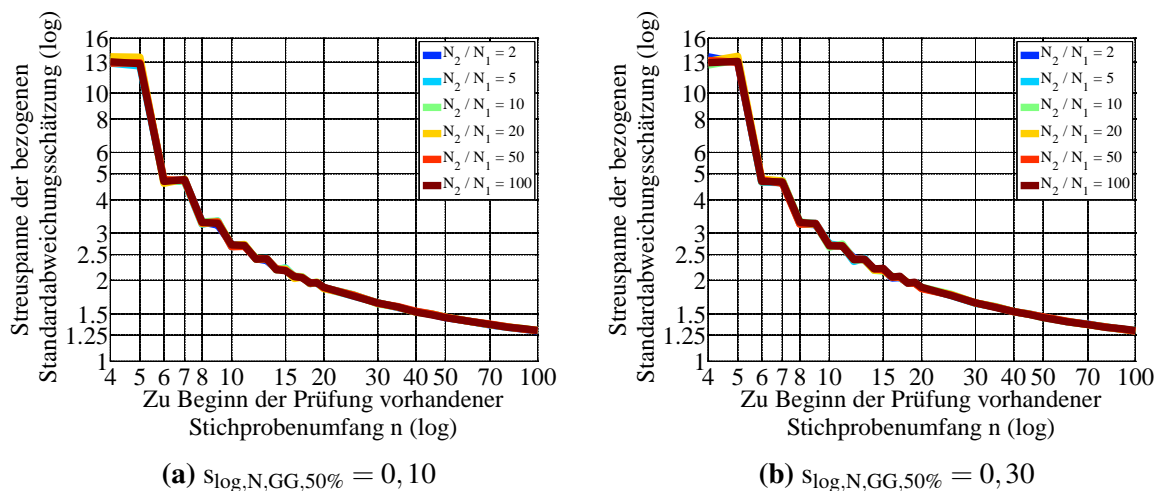


Abbildung 6.20: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Standardabweichungsschätzungen für verschiedene mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log, N, GG, 50\%}$ auf dem unteren Lasthorizont S_{a2}

Beispiel:

Bei Auswertung eines Horizontenversuchs mit $n = 20$ Proben hat sich eine logarithmische Standardabweichung der Stichprobe von $s_{\log, N, SP} = 0,15$ ergeben. Diese logarithmische Standardabweichung soll zur Umrechnung der Wöhlerlinie auf Ausfallwahrscheinlichkeiten $P_A < 50\%$ verwendet werden. Dazu wird von der logarithmische Standardabweichung der Stichprobe gefordert, dass sie in 90 % aller Fälle auf der sicheren Seite liegt.

Da die Schätzung der logarithmischen Standardabweichung unabhängig von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit ist, kann **Abbildung 6.20** eine zugehörige

Streuspanne von $T = 1,89$ entnommen werden. Die Streuspanne ist das Verhältnis aus 90 %- und 10 %-Quantil, vgl. Gleichung (3.16). Das 10 %- bzw. das 90 %-Quantil liegen Faktor \sqrt{T} vom 50 %-Quantil entfernt, vgl. **Abbildung 3.8**. Die logarithmische Standardabweichung der Stichprobe von $s_{\log, N, SP} = 0,15$ ist daher vor der Verwendung mit einem Sicherheitsfaktor von $\sqrt{T} = \sqrt{1,89} = 1,37$ zu multiplizieren, **Abbildung 6.20**, damit die geschätzte logarithmische Standardabweichung in 90 % aller Fälle auf der sicheren Seite liegt.

6.3 Empfehlungen für Experimente im Zeitfestigkeitsgebiet

Liegen keinerlei Erfahrungen über die Wöhlerlinie vor, dann sollte zunächst eine Vorabschätzung der Wöhlerlinie mittels rechnerischer Verfahren, [Berg 99], [FKM 12], [Gude 99], [Marq 04], vorgenommen werden. Einen ersten Anhaltspunkt bezüglich der logarithmischen Standardabweichung liefern Literaturangaben wie [Aden 01]. Der Versuch sollte nach dem Perlenschnurverfahren organisiert werden. Kapitel 6.1 kann der zu verwendende Mindeststichprobenumfang je nach geforderter Schätzgüte entnommen werden. Die erste Probe ist mit Hilfe der rechnerischen Wöhlerlinien möglichst im Schwerpunkt der Versuchsreihe zu platzieren, um keinen ungültigen Versuch zu erhalten. Die weiteren Proben sind möglichst weit vom Schwerpunkt entfernt einzusetzen, um hohe Schätzgüten zu ermöglichen. Das Perlenschnurverfahren besitzt dabei den Vorteil, dass die Proben auf Basis der Vorgängerergebnisse platziert werden können und so ein Abrutschen in den Kurzzeit- bzw. Langzeitfestigkeitsbereich eher erkannt wird.

Sind Erfahrungen über die Wöhlerlinie vorhanden, so dass die Lasthorizonte ausreichend sicher platziert werden können, dann ist das Horizontenverfahren bezüglich der Lage- und Neigungsschätzung zu bevorzugen. Die Erfahrungen können z.B. aus Vorversuchen mit dem Perlenschnurverfahren gewonnen werden. Unter gleichen Voraussetzungen gelingen Lage- und Neigungsschätzung mit dem Horizontenverfahren besser als mit dem Perlenschnurverfahren, [Mart 11a], da die Proben gezielt entfernt vom Schwerpunkt der Versuchsreihe platziert werden können. Der benötigte Mindeststichprobenumfang wird je nach geforderter Schätzgüte Kapitel 6.2 entnommen. Wie beim Perlenschnurverfahren ist eine Prüfung nahe den Übergangsbereichen zur Kurzzeit- bzw. Langzeitfestigkeit anzustreben, um hohe Schätzgüten zu realisieren. Beim Horizontenverfahren besteht die erhöhte Gefahr, dass Prüfungen unbemerkt im Kurzzeit- bzw. Langzeitfestigkeitsbereich stattfinden. Lage- und Neigungsschätzung können dann mit erheblichen Fehlern behaftet sein.

Das Horizontenverfahren besitzt den Vorteil, dass eine separate logarithmische Standardabweichung je Lasthorizont ausgewiesen werden kann. Dazu ist allerdings eine Aufteilung des zur Verfügung stehenden Stichprobenumfangs auf die Lasthorizonte erforderlich. Zusätzlich besteht wie beim Perlenschnurverfahren die Möglichkeit, alle Einzelversuche mit der geschätzten Wöhlerlinienneigung auf einen gemeinsamen Lasthorizont umzurechnen. Dadurch stünde wie beim Perlenschnurverfahren der gesamte Stichprobenumfang zur Schätzung der logarithmischen Standardabweichung zur Verfügung. Die Standardabweichungsschätzung ist in diesem Fall durch die Umrechnung mit der geschätzten Wöhlerlinienneigung identisch mit der im Perlenschnurverfahren.

Eine Schätzung der logarithmischen Standardabweichung mit einer hohen Schätzgüte lässt sich nur durch den Einsatz eines großen Stichprobenumfangs ermöglichen. Unter der Annahme, dass die logarithmische Standardabweichung über dem gesamten Zeitfestigkeitsbereich konstant ist und der Versuchsingenieur allein an der Schätzung der Streuung interessiert ist, kann auch der gesamte Stichprobenumfang auf einem Prüfhorizont eingesetzt werden (Horizontenverfahren mit nur einem Prüfhorizont). Die Schätzung der Streuung gelingt dann mit diesem einen Prüfhorizont besser als mit dem Perlenschnurverfahren (Verlust eines zusätzlichen Freiheitsgrads). Ab einem zu Beginn der Prüfung vorhandenen Stichprobenumfang von $n \geq 20$ sind die Unterschiede zwischen der Streuungsschätzung mit allen Proben auf einem Horizont und der Schätzung mit dem Perlenschnurverfahren vernachlässigbar.

Kapitel 6.1 und Kapitel 6.2 weisen statistisch begründete Sicherheitsfaktoren für das Perlenschnur- bzw. das Horizontenverfahren aus. Durch Anwendung dieser Sicherheitsfaktoren lassen sich verlässliche Schätzungen auch mit Versuchsreihen kleiner Stichprobenumfänge durchführen.

7 Simulative Untersuchungen im Langzeitfestigkeitsgebiet

Zur experimentellen Ermittlung der Langzeitfestigkeit existieren zahlreiche Verfahren. In der Literatur werden das Treppenstufenverfahren, [Dixo 48], das Abgrenzungsverfahren, [Maen 77], und das Probitverfahren, [Finn 47], am häufigsten genannt. Weiterhin existiert eine Kombination aus Treppenstufen- und Abgrenzungsverfahren, [Klub 95]. Für das Treppenstufenverfahren existiert eine Vielzahl von Auswertemethoden:

- Auswertung nach Dixon-Mood, [Dixo 48]
- Auswertung nach der IABG-Methode, [Hück 83]
- Auswertung nach Maximum-Likelihood, [Dixo 48] und [Liu 01]
- Auswertung nach Deubelbeiss, [Deub 74]

Wie auch im Zeitfestigkeitsgebiet, vgl. Kapitel 6, existieren zur experimentellen Ermittlung der Langzeitfestigkeit mittels spannungs- bzw. kraft geregelter Versuche keine verbindlichen Vorschriften. Bestehende Normen wie [DIN 50100] helfen nicht bei der Auswahl des optimalen Verfahrens bzw. der optimalen Auswertemethode und des benötigten Stichprobenumfangs. In [DIN 50100] werden hauptsächlich Begrifflichkeiten definiert.

Mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen werden in diesem Kapitel die einleitend genannten Verfahren zur experimentellen Ermittlung der Langzeitfestigkeit analysiert und verglichen. Das Locativerfahren, [Loca 55], und das Verfahren nach Prot, [Prot 48], werden aufgrund der fehlenden Streuungsschätzung nicht betrachtet. Beim Treppenstufenverfahren wird ein zusätzlicher Fokus auf die Untersuchung der verschiedenen Auswertemethoden gelegt. Dem Anwender werden Empfehlungen bezüglich des besten Verfahrens gegeben. Weiterhin wird eine Möglichkeit zur Festlegung des Stichprobenumfangs in Abhängigkeit der geforderten Schätzgüte aufgezeigt. Bei festgelegtem Stichprobenumfang liefern die Untersuchungsergebnisse Aussagen über die zu erwartenden Treffsicherheiten. Aus den Analysen lassen sich statistisch begründete Sicherheitsbeiwerte ableiten, die das Verwenden kleiner Stichprobenumfänge bei gleichzeitig hoher Belastbarkeit der erzielten Versuchsergebnisse ermöglichen.

Für die Langzeitfestigkeit existieren in der Literatur keine derart umfangreichen Versuchsreihen wie für die Zeitfestigkeit, vgl. Kapitel 5. Lediglich für Schraubenverbindungen, [Thom 78], und ausgewählte Stahlsorten, [Dorf 61] und [Maen 66], finden sich detaillierte Versuchsreihen, die jedoch mit $n \ll 50$ vergleichsweise kleine Stichprobenumfänge aufweisen. Ein abgesicherte Überprüfung der zugrundeliegenden Verteilungsfunktion kann daher für den Langzeitfestigkeitsbereich nicht erfolgen. Aufgrund der Erkenntnisse aus dem Zeitfestigkeitsbereich, Kapitel 5, wird für die folgenden Kapitel angenommen, dass die ertragbaren Spannungsamplituden im Langzeitfestigkeitsbereich einer logarithmischen Normalverteilung folgen.

7.1 Treppenstufenverfahren

Für das Treppenstufenverfahren existieren mit [Müll 12] und [Müll 14] Vorschläge wie die Grundgesamtheit in Monte-Carlo-Simulationen realitätsnah abgebildet werden kann. Die Vorschläge aus [Müll 12] und [Müll 14] werden in der vorliegenden Arbeit übernommen.

In [Müll 14] werden die IABG-Methode, [Hück 83], die Maximum-Likelihood-Methode, [Liu 01], und die Auswertemethode nach Deubelbeiss, [Deub 74], vergleichend gegenübergestellt. Eine Betrachtung der Auswertemethode nach Dixon-Mood, [Dixo 48], fehlt. Durch die Notwendigkeit eines Korrekturdiagramms zur Standardabweichungsschätzung bei der IABG-Methode ist der mögliche Umfang von auswertbaren Versuchsreihen eingeschränkt. Auf diese Schwierigkeit wird in [Müll 14] hingewiesen. Für die Maximum-Likelihood-Methode und die Auswertemethode nach Deubelbeiss existiert in [Müll 14] ein Vergleich ohne Einschränkungen.

In diesem Kapitel wird eine Näherungsgleichung für das Korrekturdiagramm der IABG-Methode entwickelt. Die entwickelte Näherungsgleichung hebt die Einschränkungen bezüglich der auswertbaren Versuchsreihen auf und wird nachfolgend als erweiterte IABG-Methode bezeichnet. Damit ist es erstmalig möglich, die Auswertemethode nach Dixon-Mood, die (erweiterte) IABG-Methode, die Maximum-Likelihood-Methode und die Auswertemethode nach Deubelbeiss ohne Restriktionen miteinander zu vergleichen.

Für den Nachweis der Korrektheit der erweiterten IABG-Methode werden ebenfalls Monte-Carlo-Simulationen verwendet. Daher findet sich zunächst eine Erklärung des verwendeten Simulationsmodells. Anschließend erfolgt die Entwicklung und der Abgleich der erweiterten IABG-Methode, so dass diese zum Schluss zusammen mit den anderen Auswertemethoden bewertet werden kann.

7.1.1 Aufbau des Simulationsmodells

Das nachstehend beschriebene Simulationsmodell zur Generierung von Treppenstufenversuchen wurde [Müll 14] entnommen. Das Simulationsmodell in [Müll 14] verwendet Vorschläge aus [Hück 83] und [Müll 12].

Für die Langzeitfestigkeit wird die logarithmische Normalverteilung in Festigkeitsrichtung durch Vorgabe von logarithmischem Mittelwert $S_{aL,50\%,GG}$ und logarithmischer Standardabweichung $s_{\log,S,GG}$ festgelegt, **Abbildung 7.1**. Wie im Versuch auch, ist der Bereich der Langzeitfestigkeit in Lasthorizonte mit äquidistantem Stufensprung d einzuteilen, **Abbildung 7.1**. Im Simulationsmodell lässt sich für jeden Lasthorizont aufgrund der bekannten Grundgesamtheit eine exakte Ausfallwahrscheinlichkeit P_A berechnen.

rithmische Standardabweichung $s_{\log,S,s} = 0,20$, **Abbildung 7.2**. Der Versuchingenieur schätzt im Vorfeld den logarithmischen Mittelwert $s_{\log,S,GG,50\%}$ der logarithmischen Standardabweichung und wählt daraufhin seinen Stufensprung d . Aufgrund der Streuung der logarithmischen Standardabweichung wird es in der Regel nicht möglich sein, das Verhältnis von Eins aus logarithmischer Standardabweichung und logarithmiertem Stufensprung zu erreichen. Mit der zufällig gewählten, logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,S,GG}$ wird diese Tatsache realitätsnah abgebildet.

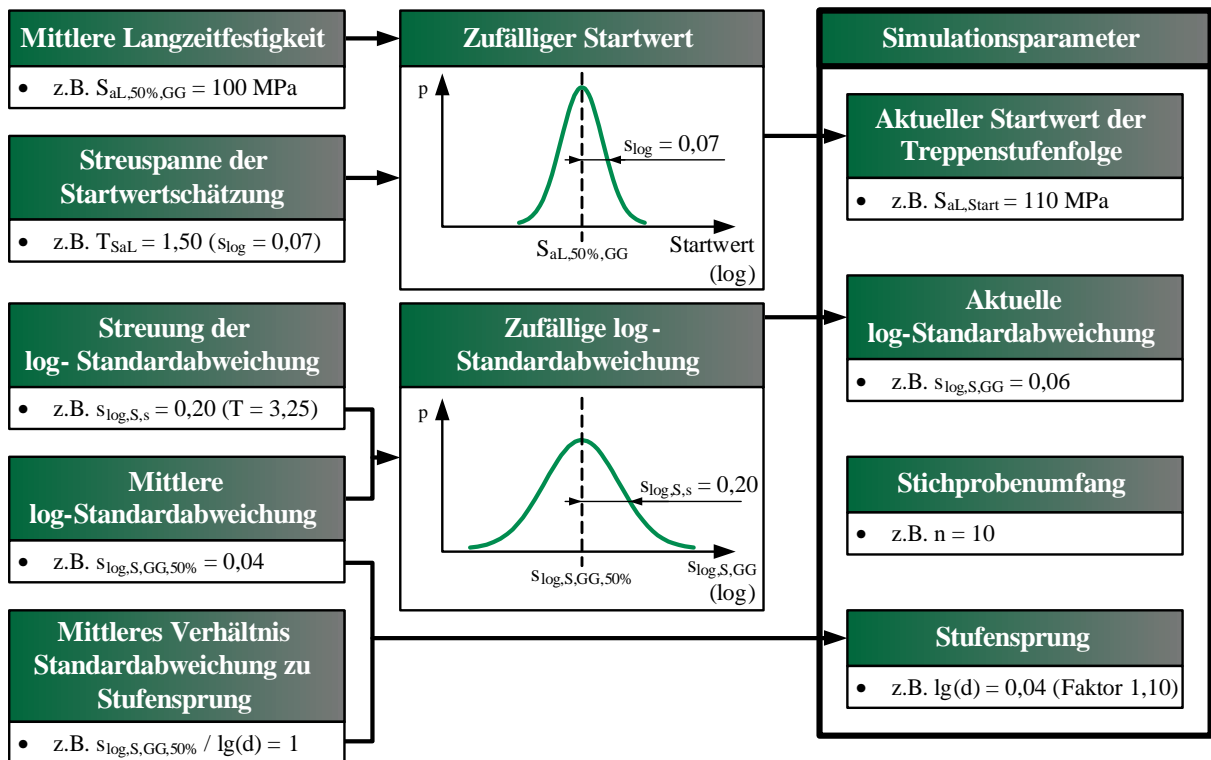


Abbildung 7.2: Bestimmung der Simulationsparameter zur Generierung von Treppenstufenfolgen mit der Monte-Carlo- Simulation, [Müll 14]

Das Simulationsmodell wird verwendet, um verschiedene Auswertemethoden für Treppenstufenfolgen bezüglich der Mittelwert- und Standardabweichungsschätzung zu bewerten. Aufgrund der großen Variationsmöglichkeiten werden die Bewertungen in zwei Schritten vorgenommen:

- Untersuchung des Einflusses des Stichprobenumfangs:
Simulationen mit konstantem Verhältnis $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$, Variation des Stichprobenumfangs n und der mittleren, logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,S,GG,50\%}$
 - Bewertung der Mittelwertschätzung
 - Bewertung der Standardabweichungsschätzung
- Untersuchung des Stufensprungeinflusses:
Simulationen mit konstanter, mittlerer logarithmischer Standardabweichung $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$, Variation des Verhältnisses $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d)$ und des Stichprobenumfangs n
 - Bewertung der Mittelwertschätzung
 - Bewertung der Standardabweichungsschätzung

7.1.2 Erweiterung der Auswertung nach der IABG-Methode (erweiterte IABG-Methode)

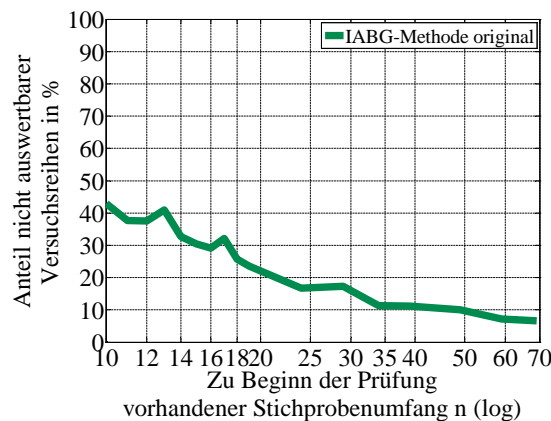


Abbildung 7.3: Anteil nicht auswertbarer Versuchsreihen bzgl. der Standardabweichungsschätzung nach der IABG-Methode, [Hück 83]
($s_{\log,S,GG,50\%} = 0,04$, $s_{\log,S,GG,s} = 0,20$, $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$)

Die in der Betriebsfestigkeit häufig angewendete IABG-Methode, [Hück 83], zur Auswertung von Treppenstufenfolgen verwendet zur Schätzung der logarithmischen Standardabweichung ein Korrekturdiagramm, **Abbildung 4.7**. Das Korrekturdiagramm ist bezüglich seines Definitionsbereichs begrenzt. Insbesondere bei Stichprobenumfängen $n < 20$ sind die Treppenstufenfolgen bezüglich der logarithmischen Standardabweichung nach der IABG-Methode daher zum Teil nicht auswertbar, **Abbildung 7.3**. Weiterhin fehlen dem Versuchingenieur für etliche Stichprobenumfänge die zugehörigen Korrekturlinien. Um trotzdem eine Auswertung vornehmen zu können, ist er auf unbefriedigende Näherungen nach Augenmaß angewiesen.

Die Überführung des Korrekturdiagramms in eine Gleichung mit zusätzlicher Erweiterung des Definitionsbereichs ist wünschenswert. Eine doppeltlogarithmische Darstellung des Korrekturdiagramms zeigt, dass die von [Hück 83] vorgeschlagenen Korrekturlinien näherungsweise als Geraden erscheinen, **Abbildung 7.4**. Sie lassen sich somit in Form einer Potenzfunktion in Abhängigkeit der Parameter a_H und b_H und der Hilfsvarianz k_H darstellen.

$$\frac{s_{\log,S,SP}}{\lg(d)} = 10^{a_H} \cdot k_H^{b_H} \quad (7.1)$$

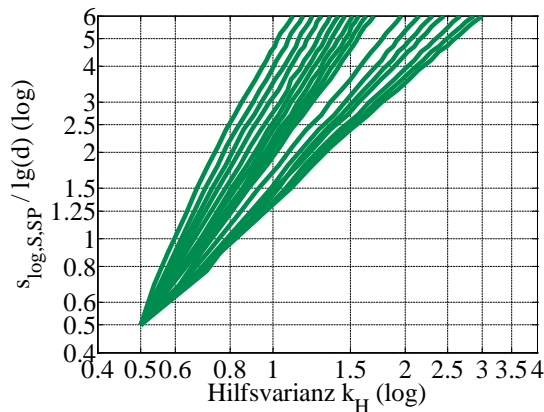


Abbildung 7.4: Doppeltlogarithmische Darstellung des Korrekturdiagramms nach [Hück 83] zur erwartungstreuen Schätzung der logarithmischen Standardabweichung nach der IABG-Methode, nachgezeichnet aus [Hück 83]

Jede Korrekturlinie aus **Abbildung 7.4** wird einer separaten, linearen Regression in der doppeltlogarithmischen Darstellung unterzogen. Die Korrekturlinien repräsentieren die auswertbaren Stichprobenumfänge, vgl. **Abbildung 4.7**. Durch die separate Regression liegen die Parameter a_H und b_H für jede Korrekturlinie bzw. jeden auswertbaren Stichprobenumfang einzeln vor. Die Parameter a_H und b_H lassen sich wiederum selbst durch Potenzfunktionen annähern.

Die bisherigen Erkenntnisse beschreiben das ursprüngliche Korrekturdiagramm in Gleichungsform und bieten bereits den Vorteil, dass prinzipiell für alle denkbaren, auswertbaren Stichprobenumfänge eine Korrekturlinie vorhanden ist. Der Verlauf des ursprünglichen Korrekturdiagramms über seine bisherigen Anwendungsgrenzen hinaus, z.B. $k_H < 0,5$ ist bisher jedoch noch unklar. Die aufgeworfene Fragestellung wird mittels Monte-Carlo-Simulation beantwortet.

Mit Hilfe des Simulationsmodells aus Kapitel 7.1.1 lassen sich die prinzipiellen Anwendungsgrenzen des Korrekturdiagramms und damit der gesuchten Näherungsgleichung überprüfen. Dazu werden verschiedene Stichprobenumfänge n , logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG}$ der Grundgesamtheit und verschiedene Stufensprünge d vorgegeben und jeweils die zugehörige Hilfsvarianz k_H berechnet. Die logarithmische Standardabweichung der logarithmischen Standardabweichung wird dabei zu $s_{\log,S,GG,s} = 0$ gesetzt ($s_{\log,S,GG} = s_{\log,S,GG,50\%}$). **Abbildung 7.5** zeigt, dass für zunehmende Verhältnisse aus logarithmischer Standardabweichung $s_{\log,S,GG}$ und logarithmiertem Stufensprung d zunehmende Hilfsvarianzen k_H zu erwarten sind. Ab einem Verhältnis von $s_{\log,S,GG}/\lg(d) \approx 0,5$ stabilisiert sich die Hilfsvarianz auf

einen Wert von $k_H = 0,5$, **Abbildung 7.5**. Kleine Verhältnisse von $s_{\log,S,GG}/\lg(d)$ bedeuten, dass ein großer Stufensprung d vorliegt. Bei großen Stufensprüngen besteht die Gefahr, dass die Treppenstufenfolge aus nur noch zwei belegten Lasthorizonten bestehen. Dabei enthält der obere nur Brüche und der untere nur Durchläufer. Die Hilfsvarianz k_H wird unabhängig vom Verhältnis aus $s_{\log,S,GG}/\lg(d)$. Damit kann die Näherungsgleichung für das Korrekturdiagramm wie folgt formuliert werden.

$$\frac{s_{\log,S,SP}}{\lg(d)} = 10^{a_H} \cdot k_H^{b_H} \quad (7.2)$$

Mit:

$$a_H(F_H) = 4,579494 \cdot F_H^{-0,889521} \quad (7.3)$$

$$b_H(F_H) = 7,235548 \cdot F_H^{-0,405229} \quad (7.4)$$

$$k_H = \frac{F_H \cdot B_H - A_H^2}{F_H^2}, \text{ falls } \frac{F_H \cdot B_H - A_H^2}{F_H^2} \geq 0,5 \quad (7.5)$$

$$k_H = 0,5, \text{ falls } \frac{F_H \cdot B_H - A_H^2}{F_H^2} < 0,5 \quad (7.6)$$

Die in Gleichung (7.6) eingeführte Untergrenze der zu verwendenden Hilfsvarianz von $k_H = 0,5$ sorgt im Falle eines zu groß gewählten Stufensprungs d für eine konservative Standardabweichungsschätzung, **Abbildung 7.5**.

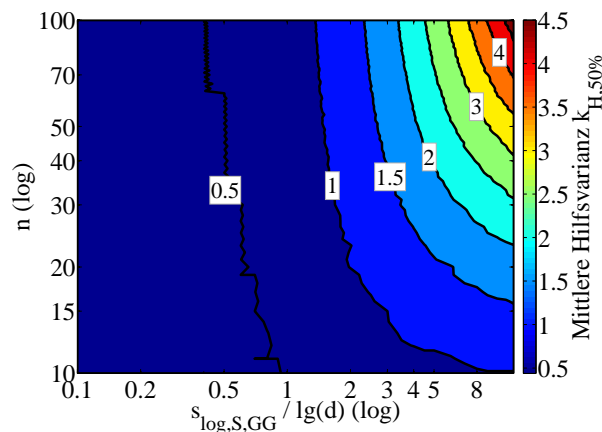


Abbildung 7.5: Mittlere Hilfsvarianzen $k_{H,50\%}$ in Abhängigkeit des Verhältnisses aus logarithmischer Standardabweichung $s_{\log,S,GG}$ der Grundgesamtheit und logarithmiertem Stufensprung d

Um Nachzuweisen, dass ursprüngliche IABG-Methode und erweiterte IABG-Methode vergleichbare Ergebnisse liefern, werden erneut Monte-Carlo-Simulationen durchgeführt. Dabei werten beide Methoden die selben Versuchsreihen aus, die aufgrund des begrenzten Definitionsbereichs der ursprünglichen IABG-Methode einer eingeschränkten Menge entstammen.

Mit dem Simulationsmodell werden Versuchsreihen generiert und mit der ursprünglichen IABG-Methode, [Hück 83], und der Näherungsgleichung, Gleichung (7.2) bis Gleichung (7.6), ausgewertet. Ist die Versuchsreihe nach der ursprünglichen IABG-Methode nicht auswertbar, wird

sie verworfen. **Abbildung 7.6** zeigt beispielhaft die mittlere Treffsicherheit bzw. die Schätzgüte der bezogenen Standardabweichungsschätzung für eine typische, mittlere, logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit von $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,04$, [FKM 12], und einem Verhältnis von $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$. Näherungsgleichung und ursprüngliche IABG-Methode zeigen nahezu die gleichen Ergebnisse. Die Aussage gilt auch für die Vorgabe anderer logarithmischer Standardabweichungen und Verhältnisse von $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d)$ (hier nicht weiter gezeigt).

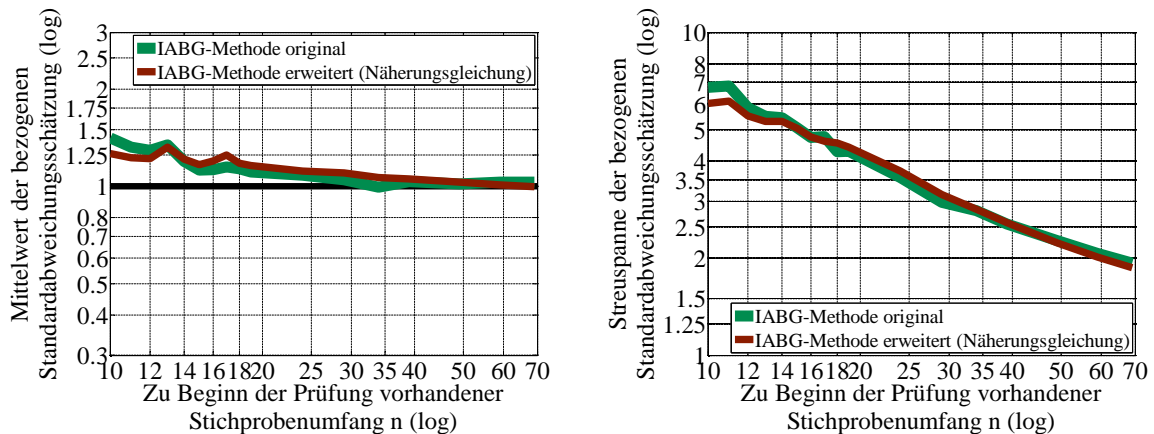


Abbildung 7.6: Mittlere Treffsicherheit (links) und Schätzgüte (Streuspanne) (rechts) der bezogenen Standardabweichungsschätzung für die originale IABG-Methode, [Hück 83] und die erweiterte IABG- Methode (Näherungsgleichung)
 $(s_{\log,S,GG,50\%} = 0,04, s_{\log,S,GG,s} = 0,20, s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0)$

Die Anwendung der entwickelten Näherungsgleichung für Stichprobenumfänge $n \ll 10$ bzw. $n \gg 70$ muss unter Vorsicht erfolgen. Bei zu großer Extrapolation kann sie ihre Gültigkeit verlieren. In den nachfolgenden Kapiteln wird gezeigt, dass die Anwendung der erweiterten IABG-Methode für zu Beginn vorhandene Stichprobenumfänge von $10 \leq n \leq 100$ bedenkenlos ist.

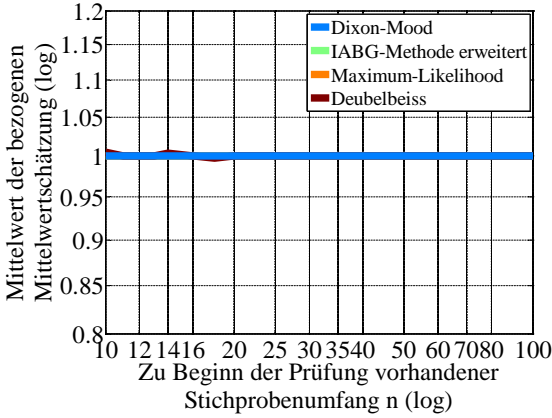
7.1.3 Untersuchung des Einflusses des Stichprobenumfangs

Für die nachfolgenden Betrachtungen wird ein typisches Verhältnis von $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$, [Dixo 48], [Hück 83], [Liu 01] gewählt. Der vor der Prüfung vorhandene Stichprobenumfang n wird variiert.

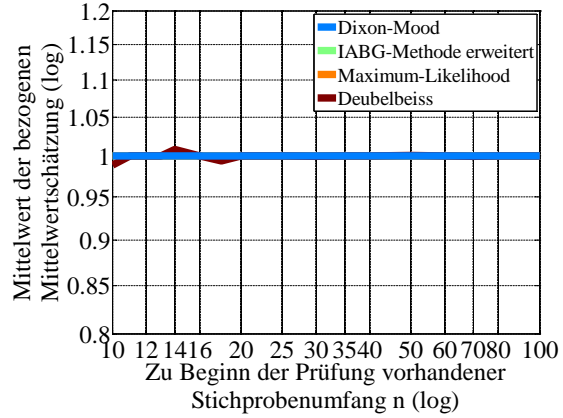
In der Betriebsfestigkeit übliche, mittlere logarithmische Standardabweichungen in Lastrichtung betragen $0,02 \leq s_{\log,S,GG,50\%} \leq 0,05$, [Aden 01]. Die Ergebnisse der Mittelwert- bzw. Standardabweichungsschätzung werden für diese beiden Grenzfälle vorgestellt.

7.1.3.1 Ergebnisse der Mittelwertschätzung

Die Mittelwertschätzung gelingt im Treppenstufenverfahren mit allen betrachteten Auswertemethoden, vgl. Kapitel 4.3.1, erwartungstreu, **Abbildung 7.7**.

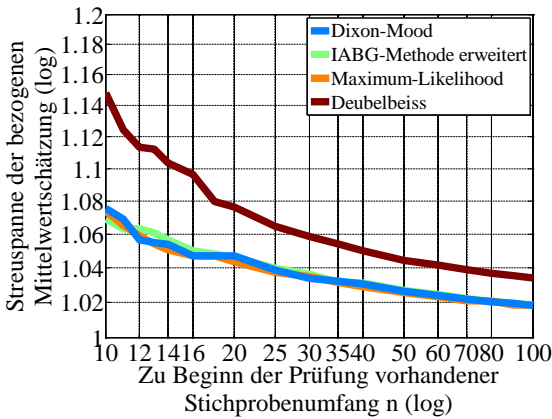


(a) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,02$

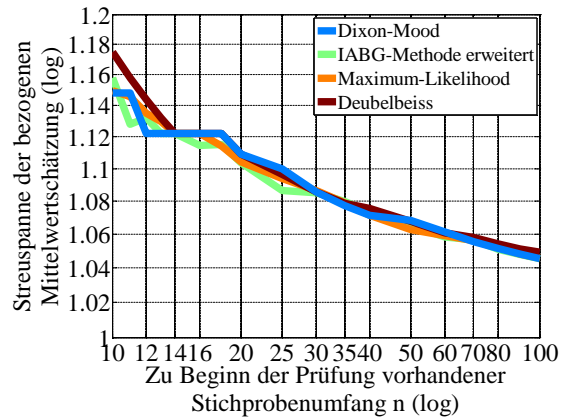


(b) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$

Abbildung 7.7: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Mittelwertschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$



(a) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,02$



(b) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$

Abbildung 7.8: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Mittelwertschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$

Zwischen den Auswertemethoden existieren im Fall der Mittelwertschätzung keine nennenswerten Unterschiede. Lediglich die Auswertemethode nach Deubelbeiss weist bei sehr kleinen, logarithmischen Standardabweichungen der Grundgesamtheit eine geringfügig schlechtere Schätzgüte als die anderen Verfahren aus, **Abbildung 7.8**.

Die Schätzgüte der Mittelwertschätzung ist abhängig von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit, **Abbildung 7.8**. Die Mittelwertschätzung ist umso schwieriger, je größer die logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit ist.

Beispiel:

Für ein Bauteil ist der Mittelwert der Langzeitfestigkeit mit dem Treppenstufenverfahren zu ermitteln. Mit Hilfe von Literaturwerten, z.B. [Aden 01], wird eine Vorabschätzung der mittleren, logarithmischen Standardabweichung zu $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$ durchgeführt. Bei der Wahl des Stufensprungs d wird ein Verhältnis von $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$ angestrebt. Der geschätzte Mittelwert soll in 80 % aller Fälle nicht mehr als Faktor $1,06$ ($T = 1,06^2 = 1,12$) von der Grundgesamtheit abweichen. Aus **Abbildung 7.8** folgt, dass zu Beginn der Prüfung ein Stichprobenumfang von $n \geq 14$ zur Verfügung stehen muss, damit die Anforderungen erfüllt werden können.

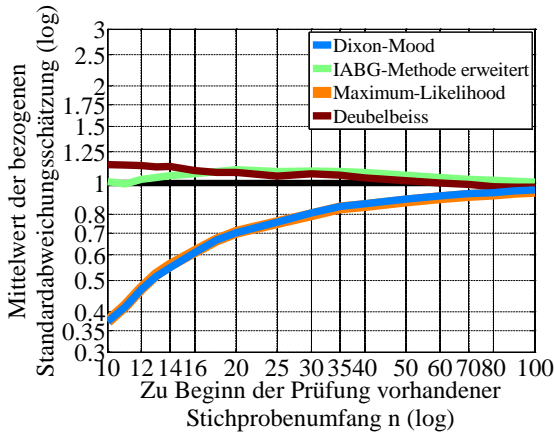
7.1.3.2 Ergebnisse der Standardabweichungsschätzung

Die Standardabweichungsschätzung ist im Gegensatz zur Mittelwertschätzung nicht immer erwartungstreu, **Abbildung 7.9**. Die erweiterte IABG-Methode tendiert in der Regel zur leichten Überschätzung der Standardabweichung und damit zur sicheren Seite. Die Über- bzw. Unterschätzungen mit der erweiterten IABG-Methode sind unter den betrachteten Auswertemethoden am geringsten, **Abbildung 7.9**.

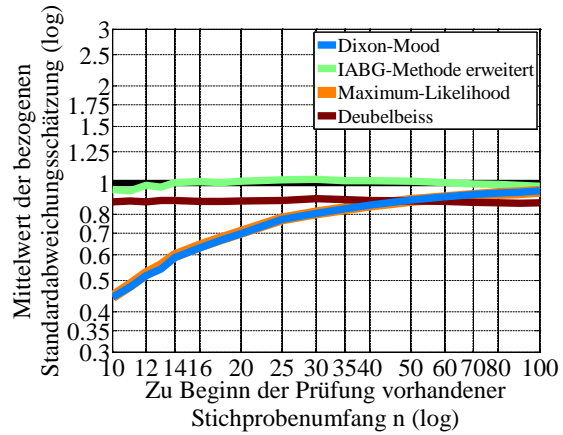
Die Methode nach Dixon-Mood und die Maximum-Likelihood-Methode liefern praktisch identische Ergebnisse, **Abbildung 7.9**. Begründet wird dies darin, dass die vereinfachte Gleichung, Gleichung (4.8), zur Standardabweichungsschätzung bei Dixon-Mood oft nicht anwendbar ist. [Dixo 48] fordert dann eine Schätzung nach der Maximum-Likelihood-Methode. Beide Methoden sind asymptotisch erwartungstreu. Ein Einfluss der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit ist nur für kleine Stichprobenumfänge $n \leq 16$ zu erkennen, **Abbildung 7.9**. Eine erwartungstreue Korrektur der Maximum-Likelihood-Methode in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs n ist daher prinzipiell möglich, vgl. auch Kapitel 7.1.4 und Kapitel 7.1.5.

Die Methode nach Deubelbeiss reagiert auf eine Veränderung der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit, **Abbildung 7.9**. Die Methode nach Deubelbeiss neigt mit zunehmender, logarithmischer Standardabweichung der Grundgesamtheit zur systematischen Unterschätzung der Standardabweichung.

Gravierender als die Problematik der Erwartungstreue sind die sehr großen Streuspannen bei der Standardabweichungsschätzung, **Abbildung 7.10**. Diese können bei gleichem Stichprobenumfang um bis zu Faktor 13 größer sein als bei der Mittelwertschätzung, **Abbildung 7.10**. Werden an die Standardabweichungsschätzung die gleichen Anforderungen gestellt wie im Beispiel zur Mittelwertschätzung, Kapitel 7.1.3.1, dann sind Stichprobenumfänge $n > 1000$ erforderlich (hier nicht weiter gezeigt).

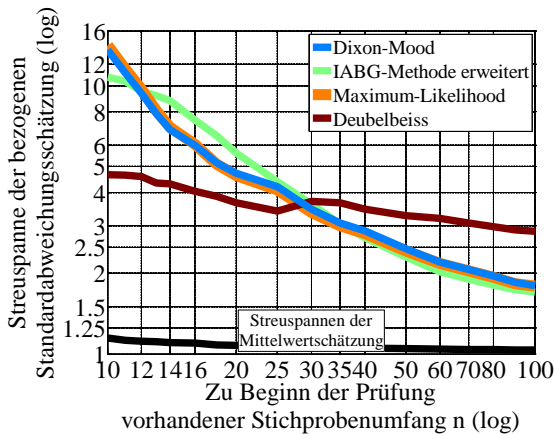


(a) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,02$

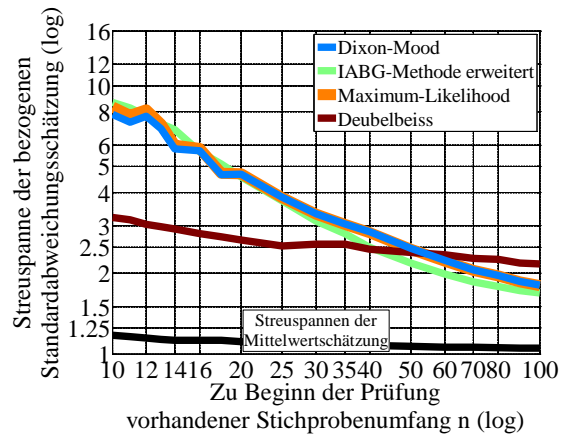


(b) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$

Abbildung 7.9: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$



(a) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,02$



(b) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$

Abbildung 7.10: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$

Für Stichprobenumfänge $n < 25$ liefert die Methode nach Deubelbeiss deutlich günstigere Streuspannen als die anderen Methoden, **Abbildung 7.10**. Aufgrund der angesprochenen Abhängigkeit von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit im Bezug auf die mittlere Treffsicherheit ist die Anwendung der Methode nach Deubelbeiss dennoch nicht zu empfehlen. Die Schwierigkeiten dieser Auswertemethode werden insbesondere bei Betrachtung des Stufensprungeinflusses deutlich, Kapitel 7.1.4. Weiterhin ist für die Methode nach Deubelbeiss auffällig, dass sich die Streuspannen bei Erhöhung des Stichprobenumfangs nur unwesentlich verbessern. Dixon-Mood, erweiterte IABG-Methode und Maximum-Likelihood liefern praktisch die gleichen Schätzgüten, die insbesondere im Bereich kleiner Stichprobenumfänge $n < 20$ sehr groß sind. Für Stichprobenumfänge $n > 16$ zeigt sich für alle Auswertemetho-

den außer Deubelbeiss keine erkennbare Abhängigkeit der Schätzgüte von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit, **Abbildung 7.10**.

Beispiel 1:

Ein Versuchsingenieur hat einen Treppenstufenversuch mit $n = 20$ Proben durchgeführt. Auf Basis von Erfahrungswerten hat er die mittlere, logarithmische Standardabweichung $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit abgeschätzt und basierend darauf ein Verhältnis von $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$ angestrebt. Die aus dem Versuch ermittelte, logarithmische Standardabweichung beträgt $s_{\log,S,SP} = 0,048$. Zur Weiterverwendung dieser logarithmischen Standardabweichung soll ein Sicherheitsfaktor zum Einsatz kommen, der es ermöglicht, dass die Schätzung der logarithmischen Standardabweichung in 90 % aller Fälle auf der sicheren Seite liegt. **Abbildung 7.10** kann der gesuchte Sicherheitsfaktor zu $\sqrt{T} = \sqrt{4,67} = 2,16$ entnommen werden. An dieser Stelle sei angemerkt, dass für diese Umrechnung eine erwartungstreue Schätzung vorausgesetzt werden muss.

Beispiel 2:

Wird der in Beispiel 1 genannte Versuch unter sonst gleichen Bedingungen mit einem Stichprobenumfang von $n = 35$ durchgeführt, kann der Sicherheitsfaktor auf $\sqrt{T} = \sqrt{3,06} = 1,75$ reduziert werden, **Abbildung 7.10**.

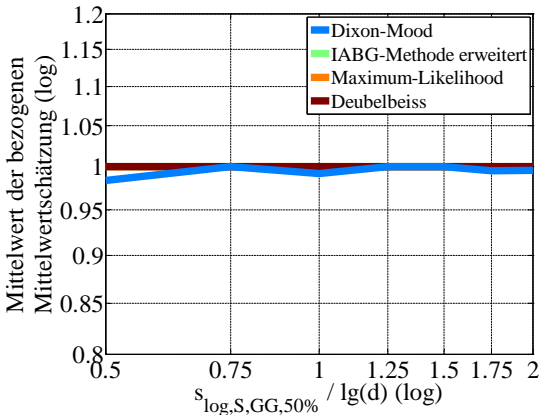
7.1.4 Untersuchung des Einflusses des Stufensprungs

Treppenstufenfolgen verhalten sich ähnlich, wenn ihr Verhältnis aus logarithmischer Standardabweichung und logarithmiertem Stufensprung vergleichbar ist. Der Stufensprung muss folglich in Abhängigkeit der logarithmischen Standardabweichung gewählt werden, vgl. auch [Dixo 48], [Hück 83] und [Liu 01]. Die Wahl des Stufensprungs stellt den Anwender somit vor eine große Herausforderung, da die logarithmische Standardabweichung in der Versuchsplanung meist nicht exakt bekannt ist. Sie liegt nur aus Erfahrungs- oder Literaturwerten, z.B. [Aden 01], vor. Ohne Erfahrungs- oder Literaturwerte stellt der Anwender evtl. immer einen vergleichsweise kleinen oder großen Stufensprung ein. Eine Mindestanforderung an die Auswertemethoden für das Treppenstufenverfahren ist damit, dass ihre mittleren Treffsicherheiten (50 %-Quantile) nahezu unabhängig von der Wahl des Stufensprungs sind.

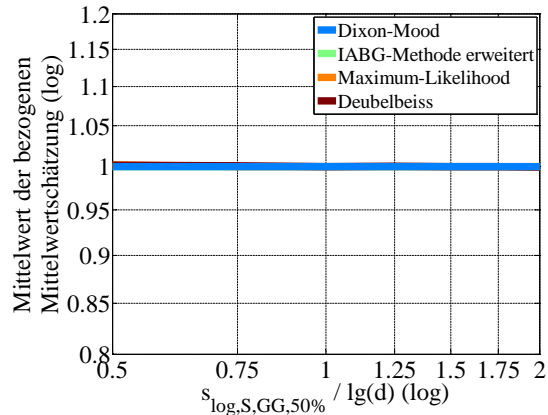
Die nachfolgenden Ergebnisse werden anhand einer mittleren, logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit von $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$ vorgestellt. Die getroffenen Aussagen gelten tendenziell auch für andere mittlere, logarithmische Standardabweichungen der Grundgesamtheit.

7.1.4.1 Ergebnisse der Mittelwertschätzung

Die Mittelwertschätzung ist sowohl bezüglich der Treffsicherheit als auch bezüglich der Schätzgüte praktisch unabhängig von der Wahl des Stufensprungs d , **Abbildung 7.11** und **Abbildung 7.12**.

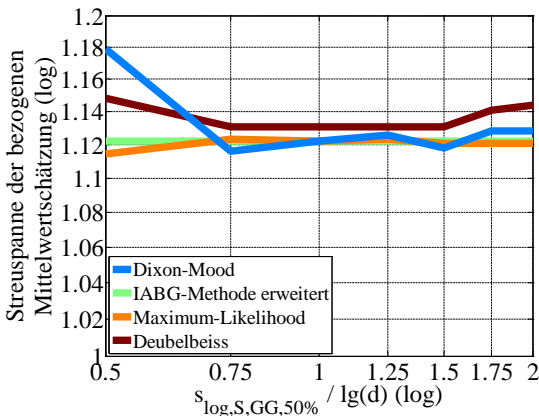


(a) vor der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang $n = 15$

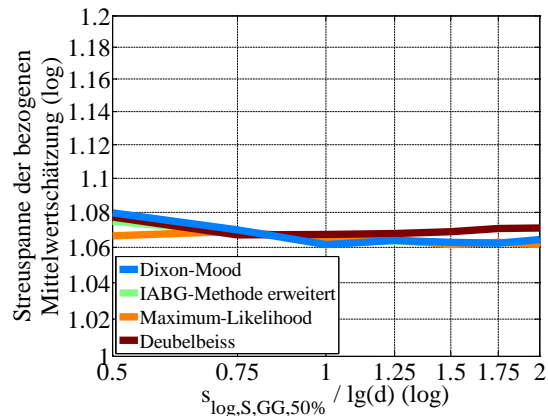


(b) vor der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang $n = 50$

Abbildung 7.11: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Mittelwertschätzung für verschiedene Stufensprünge d und verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n , $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$



(a) vor der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang $n = 15$



(b) vor der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang $n = 50$

Abbildung 7.12: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Mittelwertschätzung für verschiedene Stufensprünge d und verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n , $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$

Für Dixon-Mood verschlechtert sich die Schätzgüte bei großen Stufensprüngen ($s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) \ll 1$) und kleinen Stichprobenumfängen, **Abbildung 7.12 links**. Das beobachtete Verhalten ist der Tatsache geschuldet, dass mit zunehmendem Stufensprung die Anzahl der belegten Lashorizonte abnimmt. Mögliche Fehleinschätzungen aufgrund des kleinen

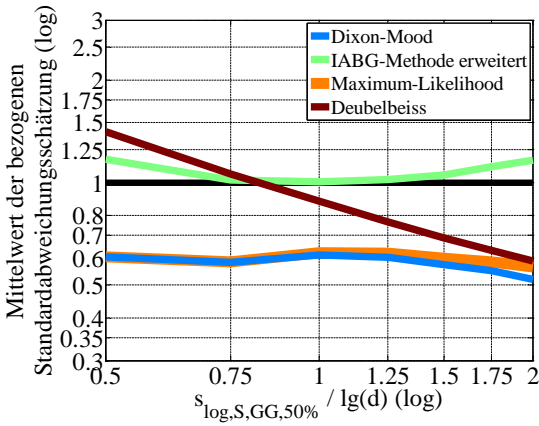
Stichprobenumfangs auf einem Lasthorizont können daher nur noch schwer durch andere, günstigere Lasthorizonte ausgeglichen werden. Das Phänomen betrifft prinzipiell alle Auswertemethoden. Jedoch reagiert die Methode nach Dixon-Mood darauf am empfindlichsten.

7.1.4.2 Ergebnisse der Standardabweichungsschätzung

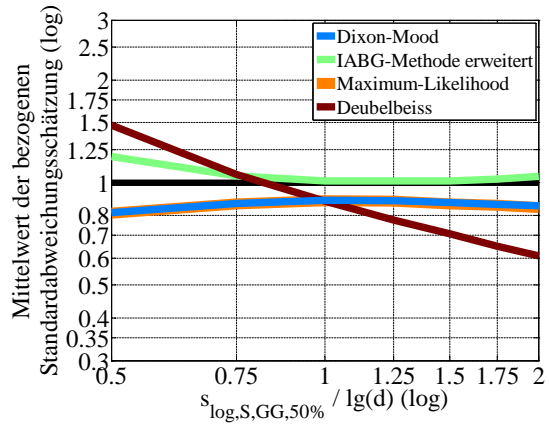
Die Methode nach Deubelbeiss zeigt für die mittlere Treffsicherheit der Standardabweichungsschätzung eine starke Abhängigkeit vom gewählten Stufensprung. Große Stufensprünge ($s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) \ll 1$) führen zu einer Überschätzung, kleine Stufensprünge ($s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) \gg 1$) zu einer Unterschätzung der Standardabweichung, **Abbildung 7.13**. Das Verhalten ist unabhängig vom Stichprobenumfang. Die Methode nach Deubelbeiss ist bezüglich der Standardabweichungsschätzung damit abhängig von der mittleren, logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, Kapitel 7.1.3, und vom Stufensprung. Deubelbeiss ist daher für die Standardabweichungsschätzung nicht zu empfehlen, da das Verhältnis $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d)$ in der Versuchsplanung unbekannt ist. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass sich bei Verwendung der Methode nach Deubelbeiss die Schätzgüten bei kleinen, mittleren logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit erkennbar verschlechtern, vgl. Kapitel 7.1.3.

Die anderen Methoden sind bezüglich der mittleren Treffsicherheit nahezu robust gegen einen Veränderung des Stufensprungs, **Abbildung 7.13**. Die für Dixon-Mood und Maximum-Likelihood erkennbare, systematische Unterschätzung ist durch die asymptotische Erwartungstreue begründet, vgl. Kapitel 7.1.3.

Im Fall kleiner Stichprobenumfänge ist bei allen Methoden eine Verschlechterung der Schätzgüte mit abnehmendem Stufensprung zu erkennen, **Abbildung 7.14**. Liegen kleine Stufensprünge vor ($s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) \gg 1$), werden tendenziell mehr Lasthorizonte belegt als bei großen Stufensprüngen. Dadurch kann es bei ungünstig gewähltem Startwert zu einer zunächst rein fallenden oder rein steigenden Treppenstufenfolge kommen, bis der erste Umkehrpunkt erreicht ist. Dieser Abschnitt führt zu einer Verringerung der zur Verfügung stehenden Informationen, da die Lasthorizonte im Laufe der Treppenstufenfolge nicht bestätigt werden. Für die erweiterte IABG-Methode ist er sogar vollständig von der Auswertung auszuschließen. Somit stehen für die Auswertung weniger (aussagefähige) Proben zur Verfügung, was die Verschlechterung der Schätzgüte erklärt. Die IABG-Methode reagiert durch den vollständigen Verlust der Proben im Abschnitt am empfindlichsten auf einen klein gewählten Stufensprung. Weiterhin besteht bei kleinem Stufensprung eine erhöhte Variantenvielfalt der Treppenstufenfolgen bei konstantem Stichprobenumfang, was die Schätzung zusätzlich erschwert. Für ausreichend große Stichprobenumfänge wirkt sich der Effekt eines Abschnitts nicht mehr erkennbar aus, **Abbildung 7.14 rechts**.

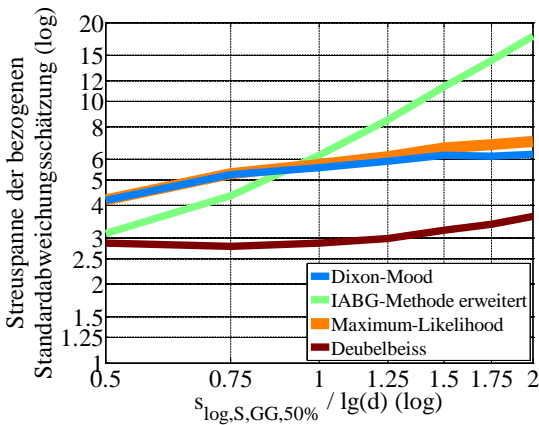


(a) vor der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang $n = 15$

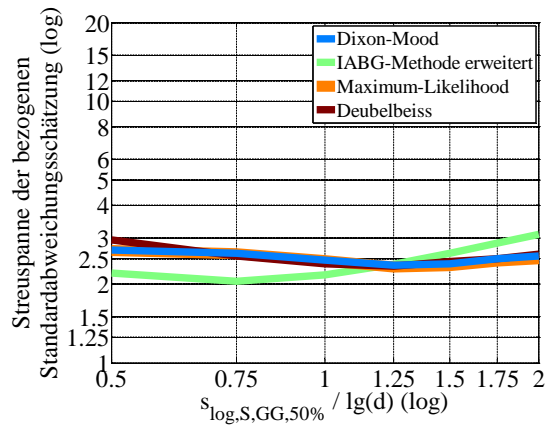


(b) vor der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang $n = 50$

Abbildung 7.13: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene Stufensprünge d und verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n , $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$



(a) vor der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang $n = 15$



(b) vor der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang $n = 50$

Abbildung 7.14: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene Stufensprünge d und verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n , $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$

7.1.5 Empfehlungen für das Treppenstufenverfahren

Bei Anwendung des Treppenstufenverfahrens sollte im Vorfeld insbesondere bei kleinen Stichprobenumfängen eine möglichst gute Schätzung des Startwerts und der logarithmischen Standardabweichung durchgeführt werden. Für die Startwertschätzung eignen sich rechnerische Wöhlerlinien, [Berg 99], [FKM 12], [Gude 99], [Marq 04]. Für die Vorabschätzung der logarithmischen Standardabweichung ist der Versuchsingenieur auf Literaturquellen, z.B. [Aden 01], oder Erfahrungswerte angewiesen.

Um aussagekräftige Treppenstufenfolgen zu erhalten, sollte der Stufensprung d so gewählt werden, dass sich ein Verhältnis von $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) \approx 1$ ergibt. Größere Stufenprünge verbessern zwar im Simulationsmodell die Schätzgüte der Standardabweichungsschätzung, jedoch besteht die Gefahr, dass Treppenstufenfolgen mit nur zwei belegten Lasthorizonten erzeugt werden. Bei nur zwei belegten Lasthorizonten kann nicht mehr sicher entschieden werden, ob der obere Lasthorizont zu weit im Übergangsbereich zur Zeitfestigkeit platziert wurde. Mittelwert und Standardabweichung werden dann eventuell fehlerhaft geschätzt.

Ist bei der Auswertung von Treppenstufenfolgen nur der Mittelwert von Interesse, kann eine beliebige der untersuchten Auswertemethoden Verwendung finden. Alle Methoden liefern ähnlich gute Ergebnisse und sind robust gegen ungünstig gewählte Stufensprünge. Bei reiner Schätzung des Mittelwerts besteht die Möglichkeit Durchläufer wieder einzusetzen, [Müll 12].

Die Schätzung der Standardabweichung mit dem Treppenstufenverfahren ist unsicher und sollte daher vermieden werden. Soll die Standardabweichung aus der Treppenstufenfolge bestimmt werden, dann ist die Auswertung nach der Methode von Deubelbeiss nicht zu empfehlen. Die erweiterte IABG-Methode stellt für Stichprobenumfänge zwischen $10 \leq n \leq 100$ eine gute Möglichkeit zur Standardabweichungsschätzung dar. Besteht die Möglichkeit einer erwartungstreuen Korrektur, kann alternativ auch die Maximum-Likelihood-Methode angewendet werden, auf die die Methode nach Dixon-Mood in der Regel zurückgreift. Mit Gleichung (7.7) ist ein empirischer Vorschlag (durch Probieren) für einen Korrekturfaktor c_{MLkorr} der Standardabweichungsschätzung mit der Maximum-Likelihood-Methode vorhanden. Die mit der Maximum-Likelihood-Methode geschätzte, logarithmische Standardabweichung kann mit dem Korrekturfaktor in Gleichung (7.7) multipliziert werden, wodurch eine erwartungstreue Korrektur erfolgt, **Abbildung 7.15**. Besteht der Verdacht einen zu kleinen Stufensprung gewählt zu haben, kann die Maximum-Likelihood-Methode mit erwartungstreuer Korrektur die beste Alternative zur Schätzung der logarithmischen Standardabweichung darstellen.

$$c_{MLkorr} = \frac{n-1}{n-6,5} \quad (7.7)$$

Über die dargestellten Schätzgüten für die Auswertemethoden kann der benötigte Mindeststichprobenumfang abgeschätzt werden. Bei festgelegtem Stichprobenumfang liefern die Schätzgüten in der Versuchsplanung Aussagen über die zu erwartende Belastbarkeit der Ergebnisse. Die Schätzgüten liefern ebenfalls statistisch begründete Sicherheitsfaktoren. Nach Auswertung der Versuche können die Ergebnisse mit den statistisch begründeten Sicherheitsfaktoren versehen werden. Damit ist es möglich, auch mit kleinen Stichprobenumfängen Versuchsergebnisse mit einer hohen Belastbarkeit zu erhalten.

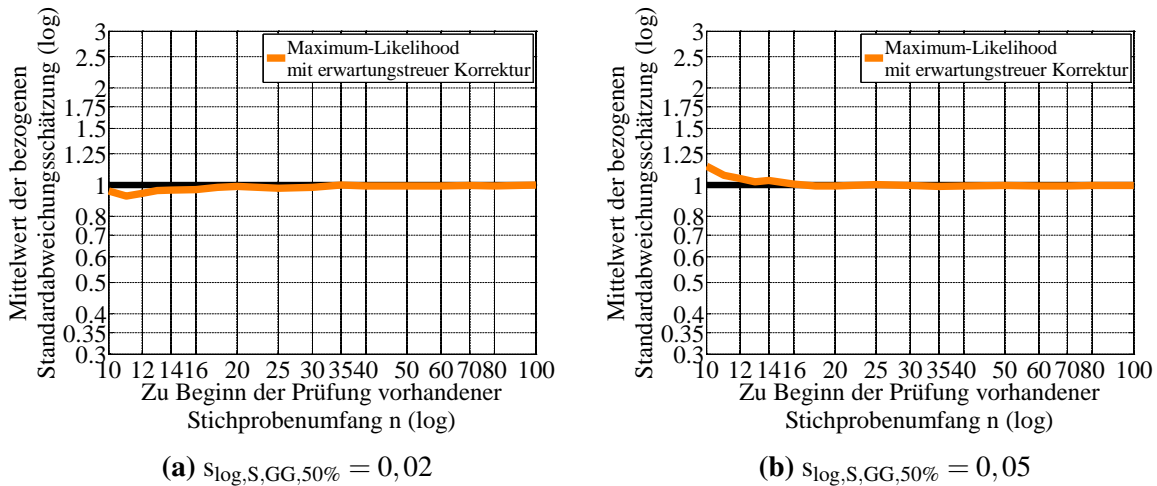


Abbildung 7.15: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit bei Anwendung des Korrekturfaktors aus Gleichung (7.7) für die Maximum-Likelihood-Methode, $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$

7.2 Abgrenzungsverfahren

7.2.1 Aufbau des Simulationsmodells

Die logarithmische Normalverteilung der Grundgesamtheit in Festigkeitsrichtung wird durch Vorgabe des logarithmischen Mittelwerts $S_{aL,50\%,GG}$ und der logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,S,GG}$ vollständig beschrieben. Analog zum Simulationsmodell des Treppenstufenverfahrens, Kapitel 7.1.1, [Müll 14], wird die in der Realität vorhandene Streuung der logarithmischen Standardabweichung mit abgebildet. Das bedeutet, dass für die logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit eine eigene, logarithmische Normalverteilung mit Mittelwert $s_{\log,S,GG,50\%}$ und logarithmischer Standardabweichung der logarithmischen Standardabweichung von $s_{\log,S,s} = 0,20$ Verwendung findet, **Abbildung 7.16**.

Um beim Auffinden des ersten Prüfhorizonts S_{a1} möglichst wenige Proben zu verlieren, muss der Bereich der Langzeitfestigkeit schon vor dem Versuch abgeschätzt werden. Der Versuchingenieur kann dazu auf Erfahrungen oder rechnerische Wöhlerlinien zurückgreifen, [Berg 99], [FKM 12], [Gude 99], [Marq 04]. Die Vorabschätzung ist mit Unsicherheiten verbunden, die im Simulationsmodell Berücksichtigung finden müssen. Dazu wird hier für den Startwert $S_{aL,Start}$ der Versuchsreihe wiederum eine logarithmische Normalverteilung unterstellt, **Abbildung 7.16**. Diese besitzt den Mittelwert der Grundgesamtheit $S_{aL,50\%,GG}$ und die Streuspanne $T_{SaL} = 1,5$ der rechnerischen Wöhlerlinien für die Langzeitfestigkeitsschätzung, [Ellm 11]. Die Wahl des Startwerts ist damit identisch zum Simulationsmodell des Treppenstufenverfahrens, Kapitel 7.1.1, [Müll 12].

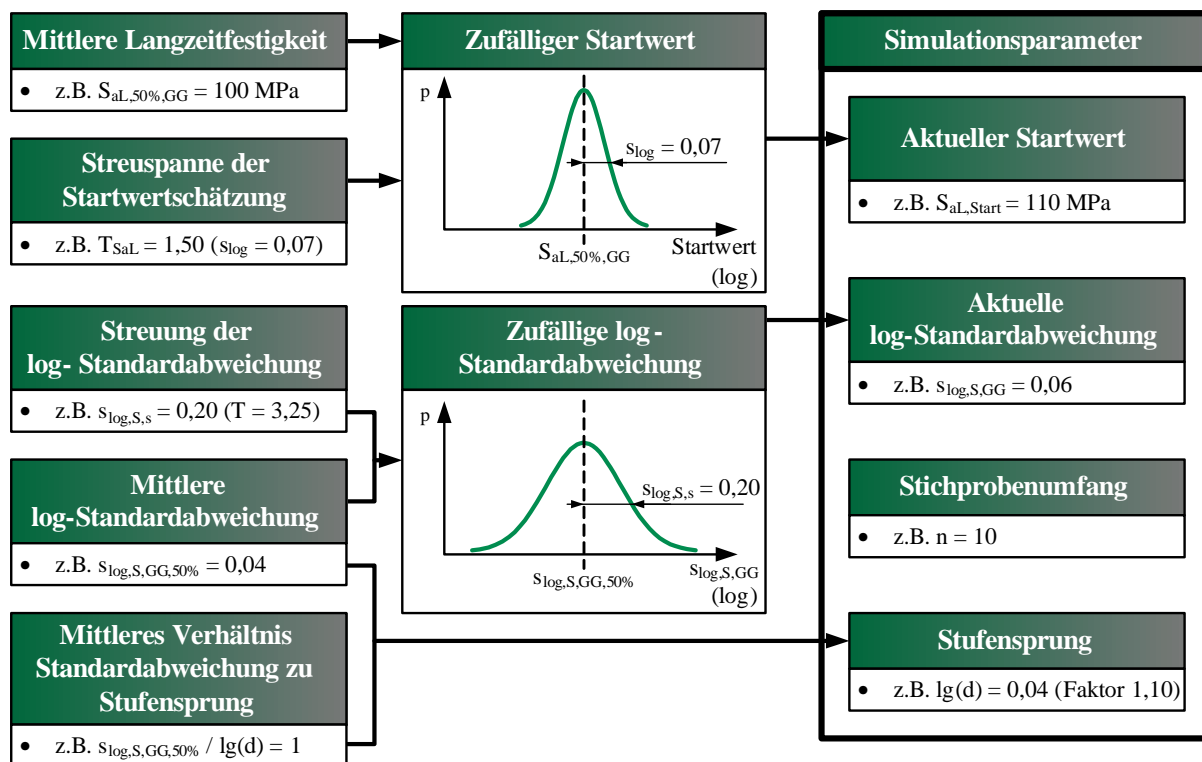


Abbildung 7.16: Bestimmung der Simulationsparameter zur Generierung eines Abgrenzungsversuchs mit der Monte-Carlo-Simulation, in Anlehnung an [Müll 14]

Für den Startlasthorizont $S_{aL,Start}$ wird eine gleichverteilte Zufallszahl zwischen Null und Eins gezogen, **Abbildung 7.17**. Die gleichverteilte Zufallszahl steht stellvertretend für die Festigkeit der Probe. Über den logarithmischen Mittelwert $S_{aL,50\%,GG}$ und die aktuell gewählte, logarithmische Standardabweichung $s_{log,S,GG}$ der Grundgesamtheit kann dem Startlasthorizont im Simulationsmodell eine exakte Ausfallwahrscheinlichkeit P_A zugewiesen werden, **Abbildung 7.17**. Ist die Zufallszahl größer als die Ausfallwahrscheinlichkeit, handelt es sich um einen Durchläufer, andernfalls um einen Bruch. Im Falle eines Durchläufers wird die folgende Probe auf einem höheren Lasthorizont geprüft, andernfalls auf einem niedrigeren. Das Vorgehen wird so lange wiederholt, bis erstmalig ein gegenteiliges Ereignis eintritt und damit der erste Prüflasthorizont S_{a1} gefunden ist, [Maen 77], **Abbildung 7.17**. Zwischen den Lasthorizonten zum Auffinden des ersten Prüflasthorizontes liegt wie beim Treppenstufenverfahren ein konstanter Faktor, der Stufensprung d , **Abbildung 7.17**.

Durch das Auffinden des ersten Prüflasthorizontes ist der zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfang n verringert worden. Der verbliebene Stichprobenumfang wird so aufgeteilt, dass auf dem ersten und dem zweiten Prüflasthorizont möglichst gleich viele Proben verwendet werden. Für den Fall, dass eine ungerade Summe zur Verfügung steht, wird im Simulationsmodell auf dem zweiten Prüflasthorizont eine Probe mehr als auf dem ersten benutzt.

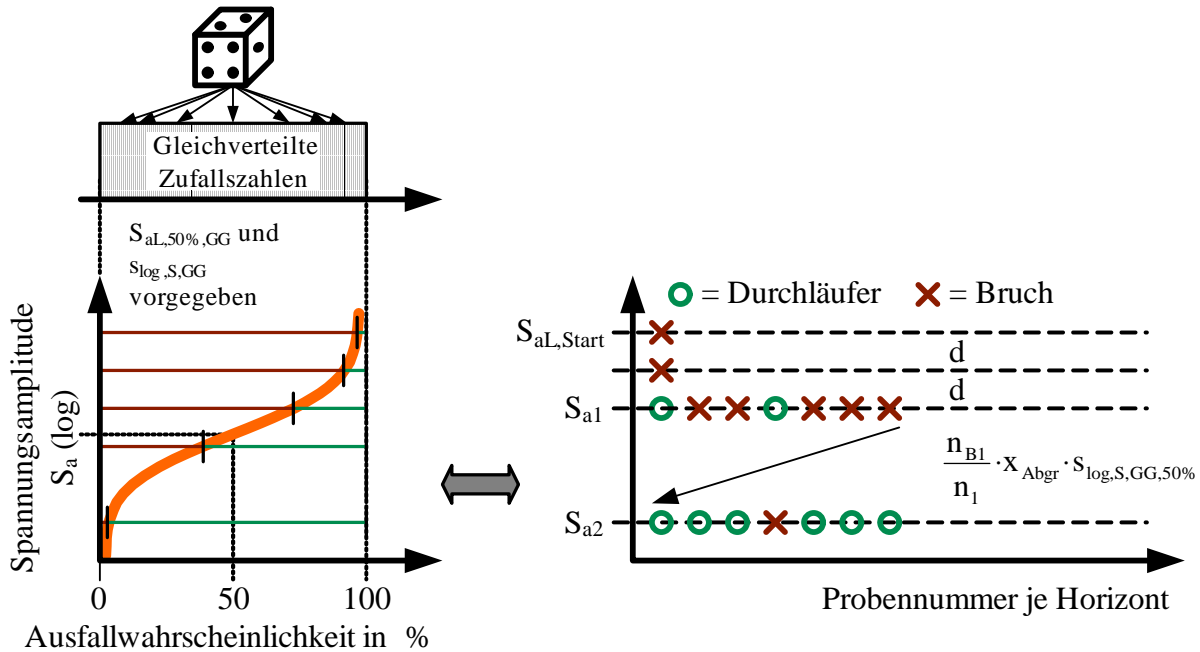


Abbildung 7.17: Generierung eines Abgrenzungsversuchs mit der Monte-Carlo-Simulation, Beispiel: Versuchsfolge beginnt mit Brüchen zum Auffinden des ersten Prüfhorizonts

Für jede Probe auf dem ersten Prüfhorizont wird eine gleichverteilte Zufallszahl zwischen Null und Eins gezogen, **Abbildung 7.17**. Über die zum Prüfhorizont gehörige Ausfallwahrscheinlichkeit findet die Entscheidung zwischen Bruch und Durchläufer statt. Der zweite Prüfhorizont S_{a2} wird gemäß Gleichung (4.18) bzw. Gleichung (4.19) gewählt, Kapitel 4.3.2. Die Simulation der Versuchsergebnisse auf dem zweiten Prüfhorizont erfolgt identisch zum ersten, **Abbildung 7.17**.

Die Simulationsergebnisse werden wie in Kapitel 4.3.2 beschrieben ausgewertet und auf die zugehörigen Werte der Grundgesamtheit bezogen. In den nachfolgenden Kapiteln werden die Ergebnisse für die folgenden Untersuchungen dargestellt.

- Mittelwertschätzung
- Standardabweichungsschätzung
- Wahl des Verschiebungsfaktors x_{Abgr} , vgl. Kapitel 4.3.2

Mit dem Simulationsmodell findet ebenfalls eine Bewertung des Einfluss des Stufensprungs d statt. Die Ergebnisse werden jedoch nicht im einzelnen vorgestellt. Bei günstig gewähltem Verschiebungsfaktor x_{Abgr} ist der Einfluss des Stufensprungs gering im Vergleich zum Verschiebungsfaktor. Die nachfolgenden Ergebnisse gelten für ein Verhältnis von $S_{log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$, das für alle zu bewertenden Parameter günstig ist.

7.2.2 Ergebnisse der Mittelwertschätzung

Mit dem Abgrenzungsverfahren kann der Mittelwert bei ausreichend großem Stichprobenumfang erwartungstreu geschätzt werden, **Abbildung 7.18**. Bei Stichprobenumfängen $n < 30$ ist eine Überschätzung des Mittelwerts bis zu Faktor 1,05 zu beobachten. Die Überschätzung ist umso größer, je größer die logarithmischen Standardabweichungen der Grundgesamtheit bzw. der Verschiebungsfaktor x_{Abgr} ist, **Abbildung 7.18**.

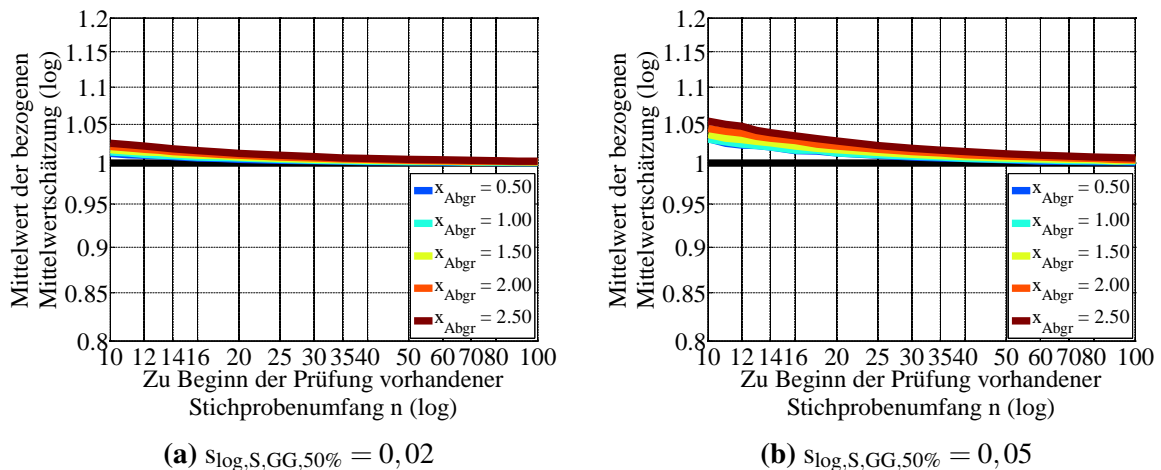


Abbildung 7.18: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Mittelwertschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$

Eine Begründung liegt in der verwendeten Näherungsgleichung zur Abschätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten P_A nach [Ross 64]. Die Näherungsgleichung darf streng genommen nur für Stichproben aus normalverteilten Grundgesamtheiten eingesetzt werden, [Ross 64]. Bei einer Schätzung von Ausfallwahrscheinlichkeiten auf einem Prüfhorizont wie beim Abgrenzungsverfahren, liegt jedoch eine binomialverteilte Grundgesamtheit auf dem Prüfhorizont vor (Ergebnis: Bruch oder Durchläufer). Die Näherungsgleichung unterschätzt die Ausfallwahrscheinlichkeit dadurch systematisch. Die Unterschätzung ist bei kleinen Stichprobenumfängen besonders ausgeprägt. Weiterhin werden Ausfallwahrscheinlichkeiten $P_A > 50\%$ stärker unterschätzt als Ausfallwahrscheinlichkeiten $P_A < 50\%$. Je weiter die Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 50\%$ entfernt geschätzt werden muss, desto stärker ist die Unterschätzung, **Abbildung 7.19**. Die Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit aus einem binomialverteilten Zufallsereignis mit kleinem Stichprobenumfang ist schwierig. Allgemein kann für ein Binomialereignis nur eine Mindest- oder eine Höchstaufallwahrscheinlichkeit angegeben werden (Konfidenzintervall), [Stan 70]. Die gefundene, systematische Unterschätzung durch die Näherungsgleichung nach [Ross 64] kann durch den Einsatz anderer Gleichungen im Mittel zwar verbessert werden, eine exakte Schätzung der tatsächlich vorliegenden Ausfallwahrscheinlichkeit ist jedoch nicht möglich.

Durch die systematische Unterschätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit, wird der logarithmische Mittelwert zu größeren Amplituden verschoben, **Abbildung 7.20**. Da die Unterschätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit bei kleinen Stichprobenumfängen und bei Schätzungen weit entfernt vom Mittelwert besonders groß ist, kommt es hier zu einer erkennbaren Überschätzung des Mittelwerts, **Abbildung 7.20**. Bei einer flachen Geraden im Wahrscheinlichkeitspapier (große Streuung) wird der Effekt zusätzlich verstärkt.

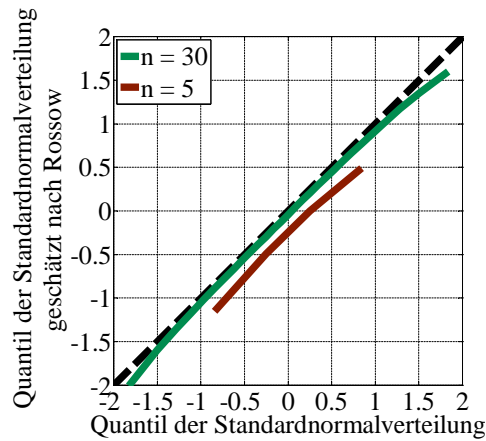


Abbildung 7.19: Systematische Unterschätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten (= Quantile der Standardnormalverteilung) bei einer binomialverteilten Grundgesamtheit auf einem Prüfhorizont durch die Näherungsgleichung nach [Ross 64]

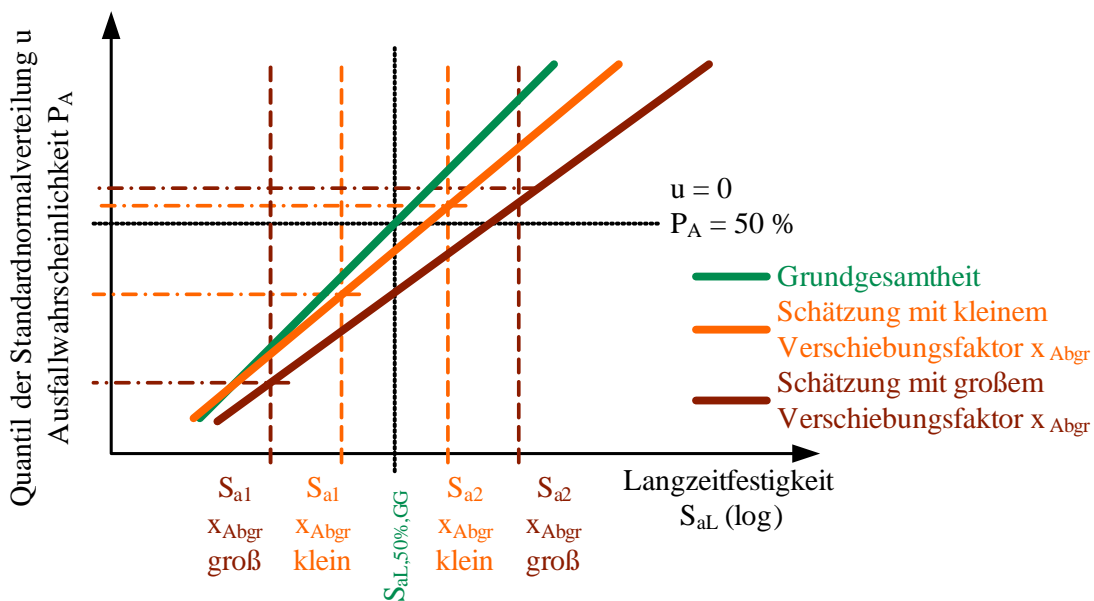


Abbildung 7.20: Fehleinschätzung von Mittelwert und Standardabweichung durch systematische Unterschätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten bei Verwendung der Näherungsgleichung nach [Ross 64]

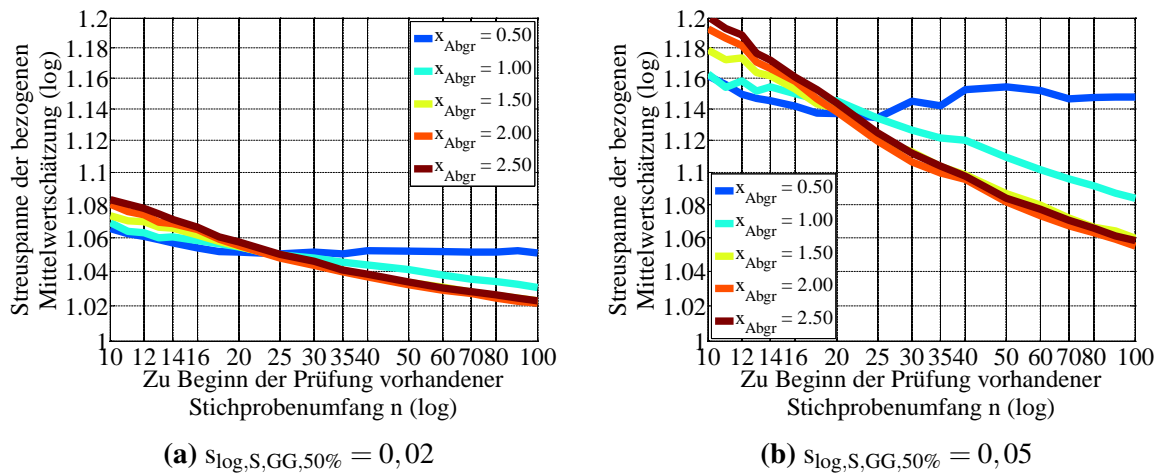


Abbildung 7.21: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Mittelwertschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$

Die Schätzgüten der Mittelwertschätzung, **Abbildung 7.21**, sind mit denen aus dem Treppenstufenverfahren vergleichbar. Sie sind erwartungsgemäß umso besser, je kleiner die Standardabweichung der Grundgesamtheit ist, vgl. Konfidenzintervalle für Mittelwertschätzungen, [Fahr 07]. Mit Ausnahme kleiner Verschiebungsfaktoren $x_{Abgr} < 1,5$ nimmt der Verschiebungsfaktor keinen erkennbaren Einfluss auf die Schätzgüte der Mittelwertschätzung, **Abbildung 7.21**. Bei kleinem Verschiebungsfaktor liegen die beiden Prüfhorizonte nah beieinander. Unterschiede auf einem Prüfhorizont von Versuchsreihe zu Versuchsreihe münden in einer vergleichsweise starken Mittelwert- und Standardabweichungsstreuung. Die Schätzgüte ist niedrig (große Streuspanne). Sie verbessert sich mit zunehmendem Stichprobenumfang praktisch nicht, da die Lasthorizonte zu eng beieinander liegen, und es dadurch zu einer großen Übersetzung des Schätzfehlers kommt, **Abbildung 7.22**.

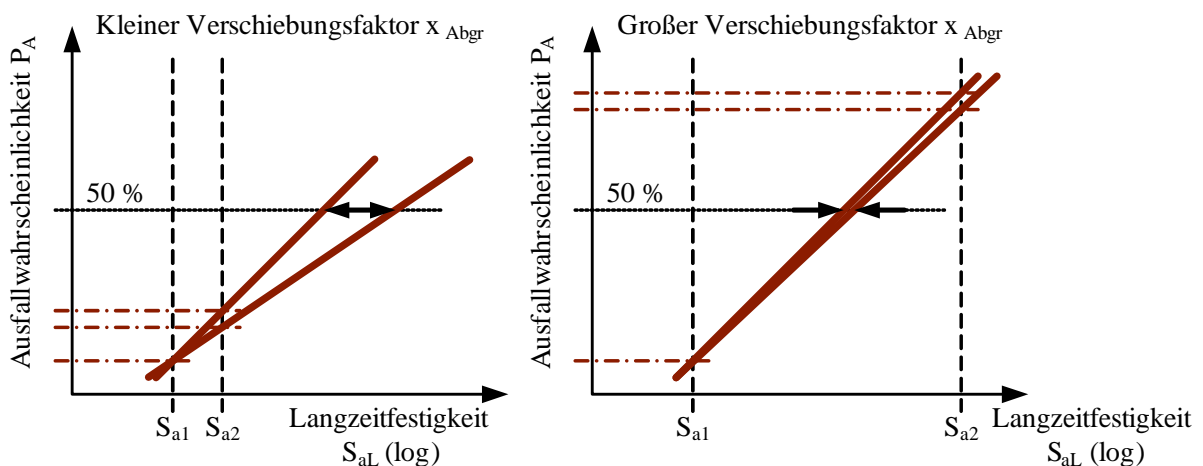


Abbildung 7.22: Verschlechterung der Mittelwertschätzgüte (Streuspanne) bei Verwendung kleiner Verschiebungsfaktoren x_{Abgr}

Beim Abgrenzungsverfahren lassen sich mit einem Verschiebungsfaktor von $x_{Abgr} \approx 2,0$ in der Regel gute Ergebnisse für die Mittelwertschätzung erzielen, **Abbildung 7.21**. Im folgenden Kapitel wird gezeigt, dass ein Verschiebungsfaktor von $x_{Abgr} \approx 2,0$ auch für die Standardabweichungsschätzung praktikabel ist.

Beispiel:

Für ein Bauteil ist der Mittelwert der Langzeitfestigkeit mit dem Abgrenzungsverfahren zu ermitteln. Mit Hilfe von Literaturwerten, z.B. [Ade 01], wird eine Vorabschätzung der mittleren, logarithmischen Standardabweichung zu $s_{log,S,GG,50\%} = 0,05$ durchgeführt. Bei der Wahl des Stufensprungs d wird ein Verhältnis von $s_{log,S,GG,50\%}/lg(d) = 1,0$ angestrebt. Der Verschiebungsfaktor beträgt $x_{Abgr} = 2,0$. Der geschätzte Mittelwert soll in 80 % aller Fälle nicht mehr als Faktor 1,06 ($T = 1,06^2 = 1,12$) von der Grundgesamtheit abweichen. Aus **Abbildung 7.21** folgt, dass zu Beginn der Prüfung ein Stichprobenumfang von $n \geq 25$ zur Verfügung stehen muss, damit die Anforderungen erfüllt werden können.

7.2.3 Ergebnisse der Standardabweichungsschätzung

Die mittlere Treffsicherheit der Standardabweichungsschätzung ist abhängig vom Verschiebungsfaktor x_{Abgr} , **Abbildung 7.23** und **Abbildung 7.24**. Sie ist unabhängig von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit, vgl. Konfidenzintervalle für Standardabweichungsschätzungen aus normalverteilten Grundgesamtheiten, [Fahr 07].

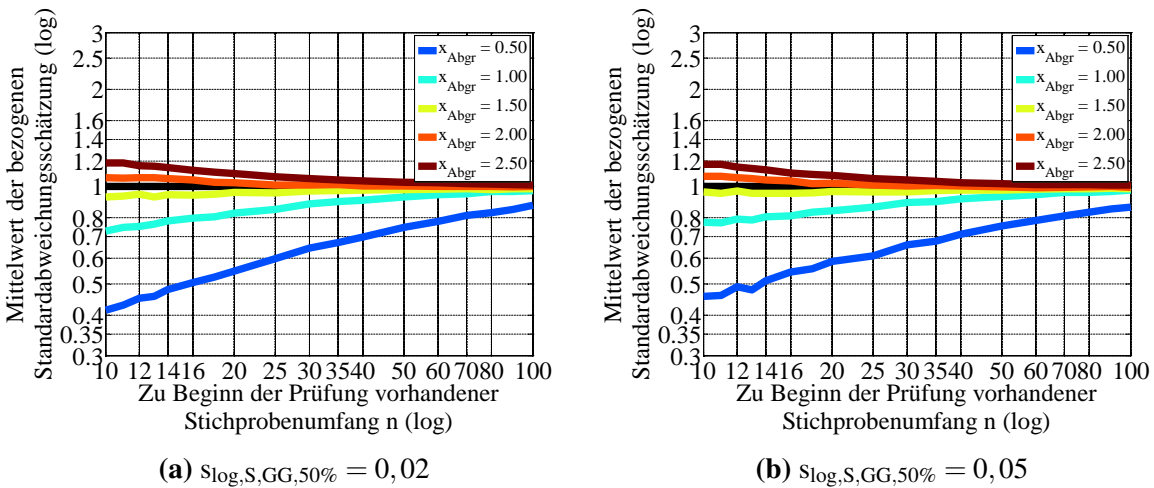
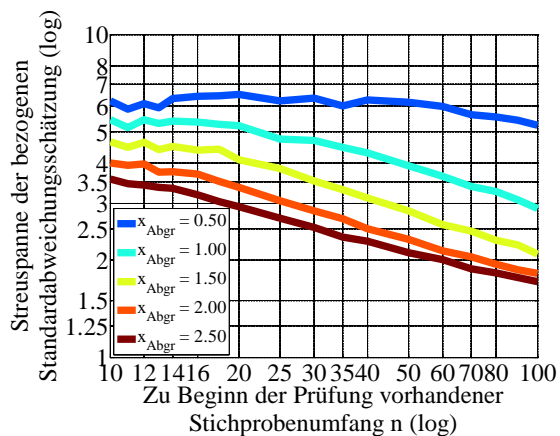


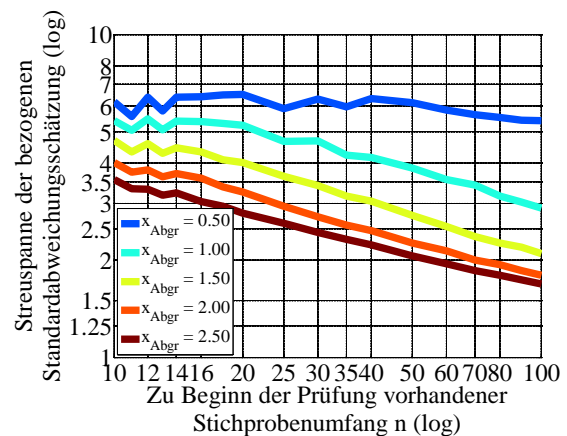
Abbildung 7.23: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, $s_{log,S,GG,50\%}/lg(d) = 1,0$

Für alle Verschiebungsfaktoren ist die Standardabweichungsschätzung asymptotisch erwartungstreu, **Abbildung 7.23**. Für kleine Verschiebungsfaktoren $x_{Abgr} < 1,5$ wird die Standardabweichung tendenziell unterschätzt. Die Prüfhorizonte liegen zu dicht beieinander, um eine sinnvolle Standardabweichungsschätzung zu ermöglichen. Die beiden Prüfhorizonte liefern häufig identische oder unplausible Versuchsergebnisse. Ein unplausibles Versuchsergebnis liegt

z.B. vor, wenn auf dem oberen Lasthorizont mehr Durchläufer vorliegen als auf dem unteren. Im Falle von identischen oder unplausiblen Versuchsergebnissen ist die Versuchsreihe nicht sinnvoll auswertbar, **Abbildung 7.25**. Ist die Versuchsreihe auswertbar, dann ist der Unterschied so groß, dass die Gerade im Wahrscheinlichkeitspapier zu steil und damit die Standardabweichung unterschätzt wird. Bei sehr großen Verschiebungsfaktoren ändern sich die vorhergesagten Ausfallwahrscheinlichkeiten auf den Lasthorizonten ab Überschreiten einer Grenze praktisch nicht mehr (Extremfall: Nur Brüche bzw. Durchläufer). Die Gerade im Wahrscheinlichkeitspapier wird zunehmend zu flach vorhergesagt (Standardabweichung zu groß). Mit einem Verschiebungsfaktor von $x_{Abgr} \approx 2,0$ lassen sich für alle Stichprobenumfänge nahezu erwartungstreue Standardabweichungsschätzungen realisieren, **Abbildung 7.23**.

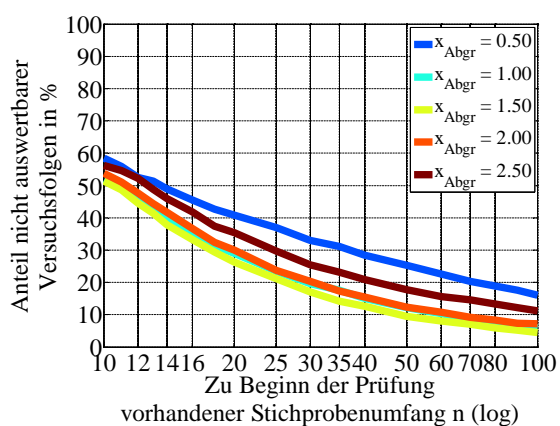


(a) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,02$

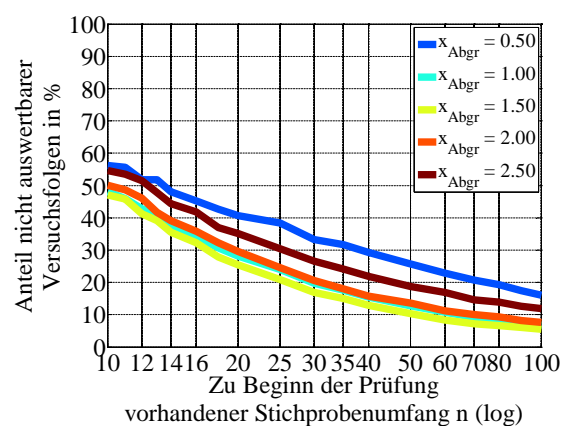


(b) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$

Abbildung 7.24: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$



(a) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,02$



(b) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$

Abbildung 7.25: Anteil nicht auswertbarer Versuchsreihen für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$

Die Schätzgüte der Standardabweichungsschätzung ist deutlich schlechter als bei der Mittelwertschätzung, **Abbildung 7.24**. Sie zeigt ähnlich der Mittelwertschätzung eine starke Abhängigkeit vom Verschiebungsfaktor x_{Abgr} . Die Abhängigkeit lässt sich durch zu eng platzierte Prüfhorizonte und die Unsicherheiten bei der Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten aus einem Binomialereignis erklären. Hier sei erneut darauf hingewiesen, dass für die Ausfallwahrscheinlichkeit bei einem Binomialereignis nur ein Konfidenzintervall angegeben werden kann, [Stan 70].

Je größer der Verschiebungsfaktor x_{Abgr} ist, desto sicherer wird die Standardabweichungsschätzung, **Abbildung 7.24**. Die Verwendung sehr großer Verschiebungsfaktoren ist dennoch nicht zu empfehlen, da der Anteil nicht auswertbarer Versuchsfolgen ansteigen kann, **Abbildung 7.25**. Im Extremfall werden auf den Prüfhorizonten nur Brüche bzw. nur Durchläufer erhalten. Ein guter Kompromiss zwischen Schätzgüte und Anteil nicht auswertbarer Versuchsfolgen stellt die Verwendung eines Verschiebungsfaktors von $x_{\text{Abgr}} \approx 2,0$ dar.

Beispiel 1:

Ein Versuchsingenieur hat einen Abgrenzungsversuch mit $n = 20$ Proben und einem Verschiebungsfaktor von $x_{\text{Abgr}} = 2,0$ durchgeführt. Auf Basis von Erfahrungswerten hat er die mittlere, logarithmische Standardabweichung $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit abgeschätzt und basierend darauf ein Verhältnis von $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$ angestrebt. Die aus dem Versuch ermittelte, logarithmische Standardabweichung beträgt $s_{\log,S,SP} = 0,048$. Zur Weiterverwendung dieser logarithmischen Standardabweichung soll ein Sicherheitsfaktor zum Einsatz kommen, der es ermöglicht, dass die Standardabweichungsschätzung in 90 % aller Fälle auf der sicheren Seite liegt. **Abbildung 7.24** kann der gesuchte Sicherheitsfaktor zu $\sqrt{T} = \sqrt{3,40} = 1,84$ entnommen werden, da die Schätzung der logarithmischen Standardabweichung mit dem Abgrenzungsverfahren unabhängig ist von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit.

Beispiel 2:

Wird der in Beispiel 1 genannte Versuch unter sonst gleichen Bedingungen mit einem Stichprobenumfang von $n = 35$ durchgeführt, kann der Sicherheitsfaktor auf $\sqrt{T} = \sqrt{2,72} = 1,65$ reduziert werden, **Abbildung 7.24**.

7.2.4 Empfehlungen für das Abgrenzungsverfahren

Der Starthorizont zum anschließenden Auffinden des ersten Prüfhorizonts sollte so gut wie möglich im Vorfeld abgeschätzt werden, damit nur wenige Proben für die Prüfhorizontfindung benötigt werden. Erfahrungen und rechnerische Wöhlerlinien, [Berg 99], [FKM 12], [Gude 99], [Marq 04], können dabei eine große Hilfe darstellen. Der verwendete Stufensprung zur Prüfhorizontfindung sollte in etwa der vorabgeschätzten, logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,S,GG,50\%}$ entsprechen ($s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$). Literaturwerte, z.B. aus [Aden 01], helfen bei der Vorabschätzung der logarithmischen Standardabweichung, wenn keine Erfahrungswerte vorliegen.

Der zu verwendende Verschiebungsfaktor für die Wahl des zweiten Prüfhorizonts sollte $x_{\text{Abgr}} \approx 2,0$ betragen. Dadurch wird ein guter Kompromiss zwischen erwartungstreuer Schätzung, Schätzung mit hoher Schätzgüte und geringem Anteil nicht auswertbarer Versuchsfolgen eingegangen.

Mit den angegebenen, erreichbaren Schätzgüten für das Abgrenzungsverfahren lassen sich benötigte Mindeststichprobenumfänge und eventuelle Sicherheitsfaktoren bestimmen.

7.3 Kombiniertes Verfahren nach Klubberg

7.3.1 Aufbau des Simulationsmodells

Das Verfahren nach [Klub 95] erfordert einen Treppenstufenversuch mit anschließender Auffüllung des obersten Lasthorizonts ähnlich einem Abgrenzungsversuch. Daher ist das benötigte Simulationsmodell eine Synthese der Modelle aus dem Treppenstufenverfahren, Kapitel 7.1.1, und dem Abgrenzungsverfahren, Kapitel 7.2.1, [Müll 14].

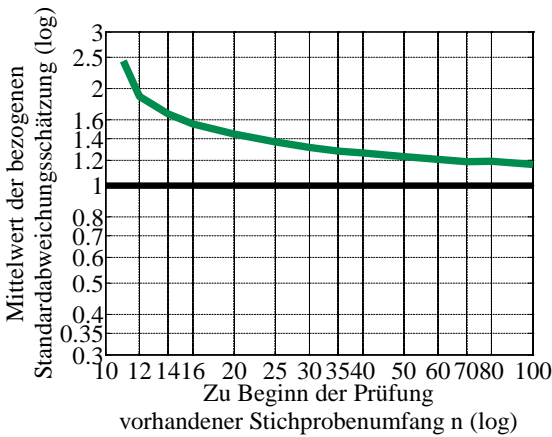
Mit dem Simulationsmodell des Treppenstufenverfahrens wird eine Treppenstufenfolge generiert. Dabei ist nur ein Teil des zu Beginn der Prüfung vorhandenen Stichprobenumfangs zu verwenden. Die Treppenstufenfolge wird bezüglich des Mittelwerts ausgewertet. Die Untersuchungen in Kapitel 7.1 zeigen, dass hierfür eine beliebige Auswertemethode verwendet werden kann. Hier wird sich für die IABG-Methode, [Hück 83], entschieden.

Aus der Treppenstufenfolge lässt sich der höchste, belegte Lasthorizont extrahieren, der auch im Anschnitt der Treppenstufenfolge liegen darf, [Klub 95]. Darunter ist zu verstehen, dass im Falle einer zu Beginn rein fallenden Treppenstufenfolge der Prüfhorizont der ersten Probe als höchster, belegter Lasthorizont verwendet wird, auch wenn dieser Prüfhorizont durch die Treppenstufenfolge nicht nochmal bestätigt wird. Dieser Lasthorizont wird mit den verbliebenen Proben aufgefüllt. Die Generierung der Versuche erfolgt analog derer auf einem Prüfhorizont beim Abgrenzungsverfahren. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die nachfolgend dargestellten und diskutierten Ergebnisse tendenziell unverändert bleiben, wenn der höchste, belegte Lasthorizont innerhalb der anschnittbereinigten Treppenstufenfolge gewählt wird.

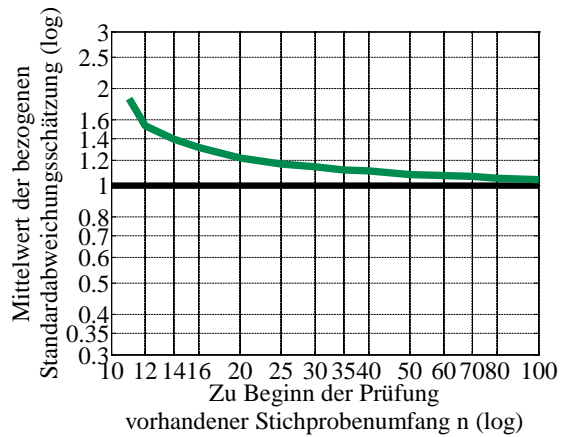
Die Auswertung bezüglich der logarithmischen Standardabweichung geschieht wie in Kapitel 4.3.3 beschrieben. Durch Beziehen der geschätzten, logarithmischen Standardabweichungen auf die Werte der Grundgesamtheit, lässt sich das Verfahren bewerten.

7.3.2 Ergebnisse der Standardabweichungsschätzung

Bei den nachfolgend dargestellten Ergebnissen werden $n_{\text{Mittelwert}} = 10$ Proben für den reinen Treppenstufenversuch verwendet. Kapitel 7.1 ist zu entnehmen, dass bereits mit diesem vergleichsweise kleinen Stichprobenumfang Mittelwertschätzungen mit hohen Schätzgüten von $T < 1,18$ möglich sind. Eine Erhöhung des Stichprobenumfangs $n_{\text{Mittelwert}}$ für die reine Treppenstufenfolge verschlechtert die Standardabweichungsschätzung bei konstantem, zu Beginn der Prüfung vorhandenem Stichprobenumfang n . Auf dem obersten Lashorizont fehlen für die Standardabweichungsschätzung wertvolle Proben, die für die im Vergleich ohnehin gute Mittelwertschätzung Verwendung finden.

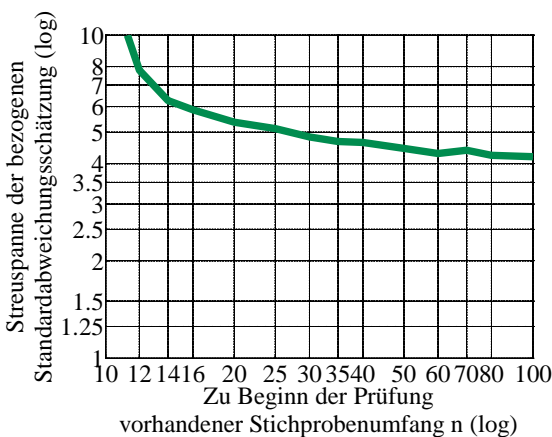


(a) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,02$

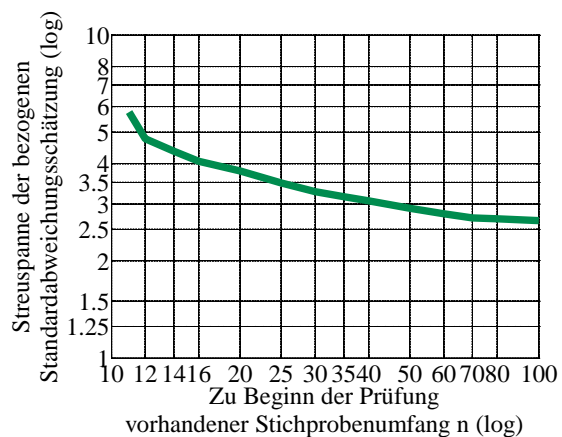


(b) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$

Abbildung 7.26: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$, $n_{\text{Mittelwert}} = 10$



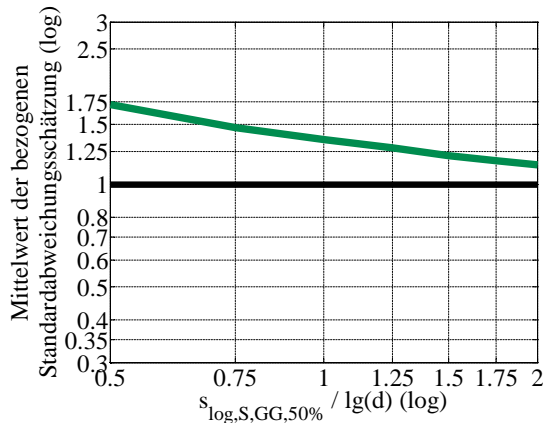
(a) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,02$



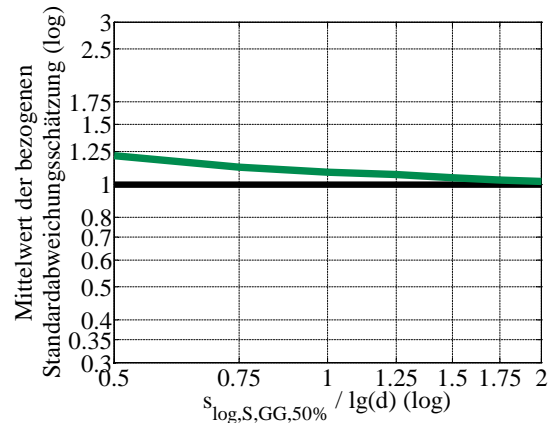
(b) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$

Abbildung 7.27: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$, $n_{\text{Mittelwert}} = 10$

Das kombinierte Verfahren nach Klubberg neigt zu einer Überschätzung der logarithmischen Standardabweichung, **Abbildung 7.26**, die bis zu Faktor 2,5 betragen kann. Weiterhin ist die Schätzung abhängig von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit, **Abbildung 7.26** und **Abbildung 7.27**. Die Überschätzung ist umso geringer und die Streuspanne umso günstiger, je größer der Stichprobenumfang und je größer die logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit ist.

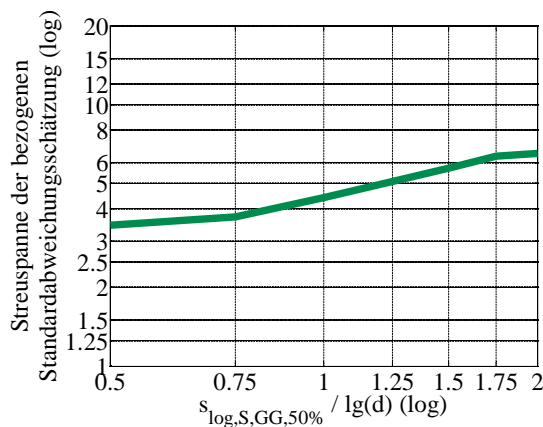


(a) vor der Prüfung vorhandener
 Stichprobenumfang $n = 15$

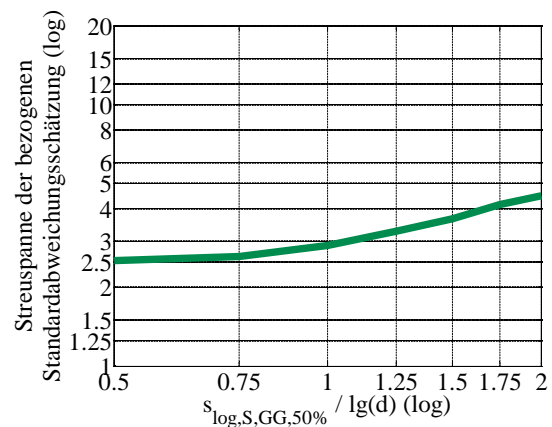


(b) vor der Prüfung vorhandener
 Stichprobenumfang $n = 50$

Abbildung 7.28: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene Stufensprünge d und verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n , $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$, $n_{\text{Mittelwert}} = 10$



(a) vor der Prüfung vorhandener
 Stichprobenumfang $n = 15$



(b) vor der Prüfung vorhandener
 Stichprobenumfang $n = 50$

Abbildung 7.29: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene Stufensprünge d und verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n , $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$, $n_{\text{Mittelwert}} = 10$

Neben der Abhängigkeit von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit zeigt das Verfahren nach Klubberg eine erkennbare Abhängigkeit vom gewählten Stufensprung, **Abbildung 7.28**. Bei kleinen Stufensprüngen $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) \gg 1$ erfolgt eine nahezu erwartungstreue Schätzung. Je kleiner der Stufensprung ist, desto schlechter wird allerdings die

Schätzgüte, **Abbildung 7.29**. Die Abhängigkeit vom Stufensprung wird mit zunehmendem Stichprobenumfang geringer, ist jedoch auch für $n = 50$ noch erkennbar, **Abbildung 7.28** und **Abbildung 7.29**.

Aufgrund der nicht erwartungstreuen Standardabweichungsschätzung, der Abhängigkeit von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit sowie der Abhängigkeit vom gewählten Stufensprung, stellt das Verfahren nach Klubberg keine Alternative zum reinen Treppenstufen- oder Abgrenzungsverfahren dar.

Dieses zunächst überraschende Ergebnis lässt sich durch mehrere Effekte erklären:

- Die Platzierung des obersten Lasthorizonts ist abhängig vom Stufensprung d .
- Die Platzierung des obersten Lasthorizonts in Abhängigkeit der Treppenstufenfolge ist nicht optimal.
- Schwierigkeiten der Näherungsgleichung nach [Ross 64] (systematische Unterschätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit) durch die Binomialverteilung auf dem obersten Prüfhorizont wirken im Gegensatz zum Abgrenzungsverfahren nur einseitig und können daher nicht durch den zweiten Prüfhorizont wie beim Abgrenzungsverfahren annähernd ausgeglichen werden, **Abbildung 7.30**.
- Für Stichprobenumfänge $n \ll 30$ muss eine im Verhältnis zum oberen Lasthorizont große Probenanzahl im Bereich des Mittelwerts platziert werden, um eine sinnvoll auswertbare Treppenstufenfolge zu erhalten, [Müll 12]. Die für die reine Treppenstufenfolge eingesetzten Proben sind für die Standardabweichungsschätzung von geringerer Bedeutung. Sie wären auf einem zweiten, vom Mittelwert entfernten Prüfhorizont wie beim Abgrenzungsverfahren sinnvoller verwendet.

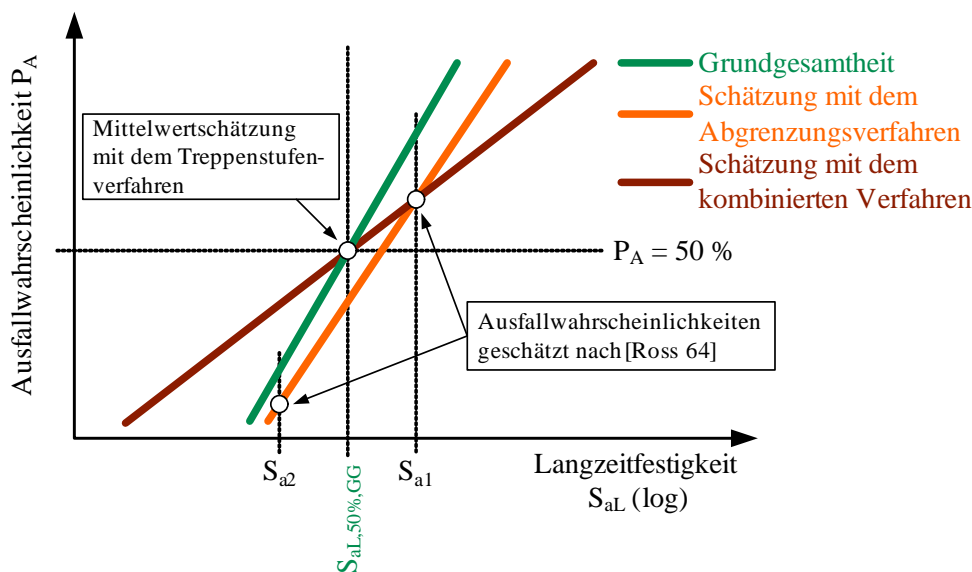


Abbildung 7.30: Überschätzung der logarithmischen Standardabweichung bei Verwendung des kombinierten Verfahrens nach [Klub 95]

7.4 Probitverfahren

7.4.1 Aufbau des Simulationsmodells

Zur Simulation von Probitversuchen wird die Grundgesamtheit analog zu den Simulationsmodellen des Treppenstufenverfahrens und des Abgrenzungsverfahren beschrieben und damit die Vorschläge aus [Müll 12] und [Müll 14] verwendet, **Abbildung 7.31**. Die Vorgabe von logarithmischem Mittelwert $S_{aL,50\%,GG}$ und logarithmischer Standardabweichung $s_{\log,S,GG}$ der Grundgesamtheit beschreiben diese vollständig. Die logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit unterliegt einer eigenen, logarithmischen Standardabweichung mit logarithmischem Mittelwert $s_{\log,S,GG,50\%}$ und logarithmischer Standardabweichung der logarithmischen Standardabweichung von $s_{\log,S,s} = 0,20$, [Aden 01]. Von Versuchsreihe zu Versuchsreihe wird die logarithmische Standardabweichung der Grundgesamtheit damit neu gewählt und damit der in der Praxis beobachteten Streuung der logarithmischen Standardabweichung, [Aden 01], Rechnung getragen, **Abbildung 7.31**.

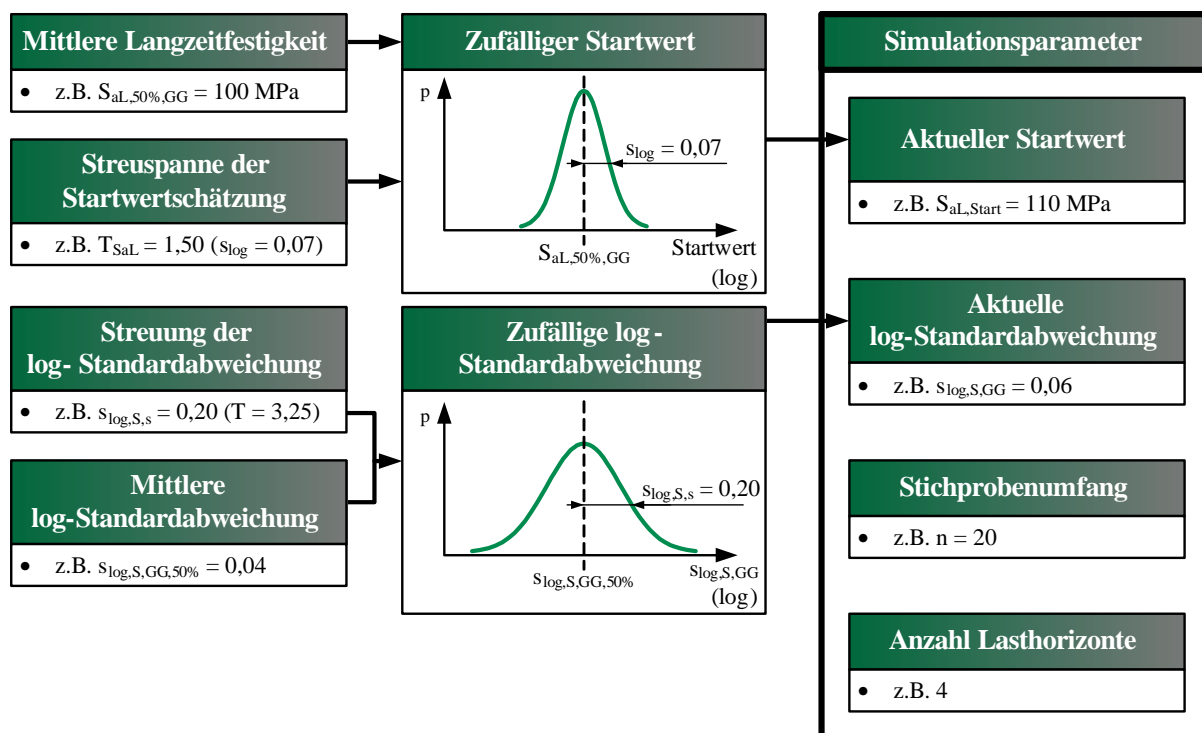


Abbildung 7.31: Bestimmung der Simulationsparameter zur Generierung eines Probitversuchs mit der Monte-Carlo-Simulation, in Anlehnung an [Müll 14]

Zur Platzierung der Lasthorizonte ist die Langzeitfestigkeit im Versuch möglichst gut abzuschätzen. Dabei können Erfahrungen oder rechnerische Wöhlerlinien, [Berg 99], [FKM 12], [Gude 99], [Marq 04], eine wesentliche Hilfe darstellen. Die vorhandene Streuung der Langzeitfestigkeitsschätzung durch rechnerische Wöhlerlinien, [Ellm 11], wird im Simulationsmodell realitätsnah nach dem Vorschlag von [Müll 12] abgebildet. Dazu wird für den Startwert $S_{aL,Start}$ eine eigene, logarithmische Normalverteilung hinterlegt. Sie besitzt den Mittelwert $S_{aL,50\%,GG}$ der Grundgesamtheit und die Streuspanne der Langzeitfestigkeitsschätzung mit rechnerischen Wöhlerlinien $T_{SaL} = 1,5$, [Ellm 11], **Abbildung 7.31**.

Auf Basis des Startwerts $S_{aL,Start}$ werden der niedrigste Prüfhorizont $S_{a,min}$ und der höchste Prüfhorizont $S_{a,max}$ nach Gleichung (4.23) bzw. Gleichung (4.24) festgelegt, **Abbildung 7.32**. Dabei wird als Vorabschätzung der logarithmischen Standardabweichung die mittlere, logarithmische Standardabweichung $s_{log,S,GG,50\%}$ verwendet. Das folgt der Annahme, dass der Versuchingenieur die logarithmische Standardabweichung im Vorfeld durch Literaturangaben wie z.B. [Aden 01] oder Erfahrungen im Mittel annähernd korrekt schätzt, sie im Einzelfall aber nicht genau trifft.

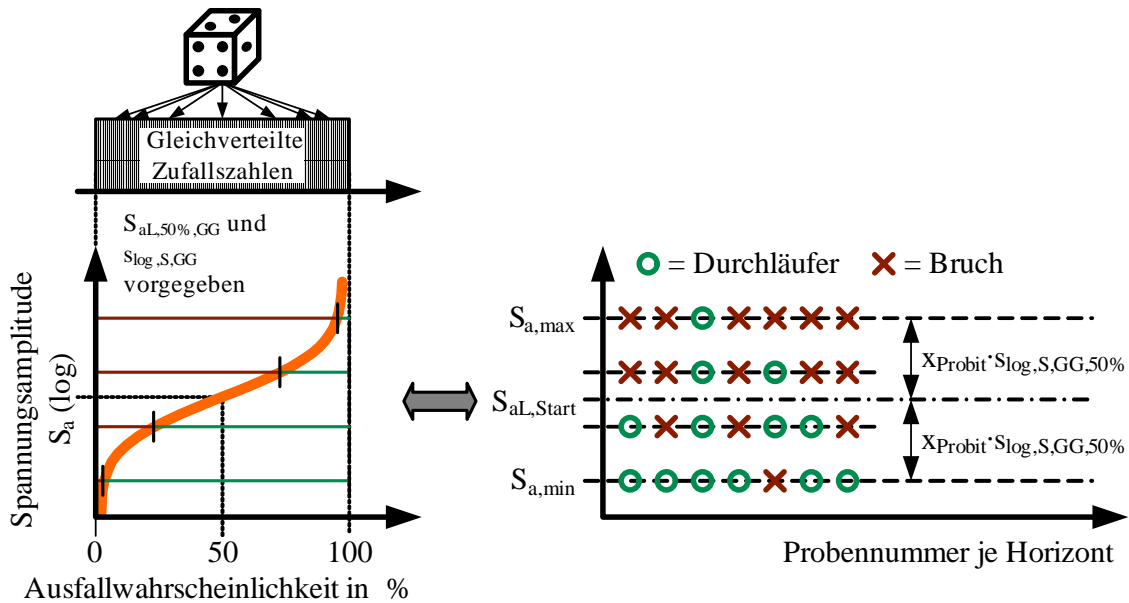


Abbildung 7.32: Generierung eines Probitversuchs mit der Monte-Carlo-Simulation

Der Bereich zwischen dem niedrigsten und dem höchsten Lasthorizont wird durch weitere Lasthorizonte in der Form aufgeteilt, dass der Faktor zwischen aufeinander folgenden Horizonten konstant ist, **Abbildung 7.32**. Auf jedem Prüfhorizont wird der gleiche Stichprobenumfang verwendet. Jeder Probe wird eine eigene, gleichverteilte Zufallszahl zwischen Null und Eins zugewiesen. Die gleichverteilte Zufallszahl repräsentiert die Festigkeit der Probe. Sie lässt sich mit der im Simulationsmodell exakt berechenbaren Ausfallwahrscheinlichkeit auf dem zugehörigen Prüfhorizont vergleichen, **Abbildung 7.32**. Ist die gleichverteilte Zufallszahl größer als die zugehörige Ausfallwahrscheinlichkeit, handelt es sich um einen Durchläufer, andernfalls um einen Bruch.

Die simulierten Versuchsreihen werden nach der Beschreibung aus Kapitel 4.3.4 ausgewertet. Die geschätzten Parameter für den logarithmischen Mittelwert und die logarithmische Standardabweichung werden auf die zugehörigen Werte der Grundgesamtheit bezogen und somit eine Bewertung ermöglicht.

Im Falle des Probitverfahrens steht durch die variable Anzahl der Prüfhorizonte eine große Variantenvielfalt zur Verfügung. Die nachfolgenden Ergebnisse werden beispielhaft für eine Prüfhorizontanzahl von vier dargestellt. Wird der Verschiebungsfaktor x_{Probit} gut gewählt, dann spielt die Anzahl der verwendeten Prüfhorizonte keine erkennbare Rolle mehr.

Nachfolgend werden die folgenden Ergebnisse vorgestellt:

- Mittelwertschätzung
- Standardabweichungsschätzung
- Wahl des Verschiebungsfaktors x_{Probit} , vgl. Kapitel 4.3.4

7.4.2 Ergebnisse der Mittelwertschätzung

Die Mittelwertschätzung ist asymptotisch erwartungstreu mit Tendenz zur unsicheren Seite (Überschätzung), **Abbildung 7.33**. Die Überschätzungen liegen in den gleichen Größenordnungen wie beim Abgrenzungsverfahren, Kapitel 7.2. Bei entfernter Platzierung der Prüfhorizonte vom Mittelwert (großer Verschiebungsfaktor x_{Probit}) ist die Überschätzung ausgeprägter. Wie beim Abgrenzungsverfahren spielt hier die systematische Unterschätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Grundgesamtheiten auf einem Prüfhorizont durch die Gleichung nach [Ross 64] eine Rolle.

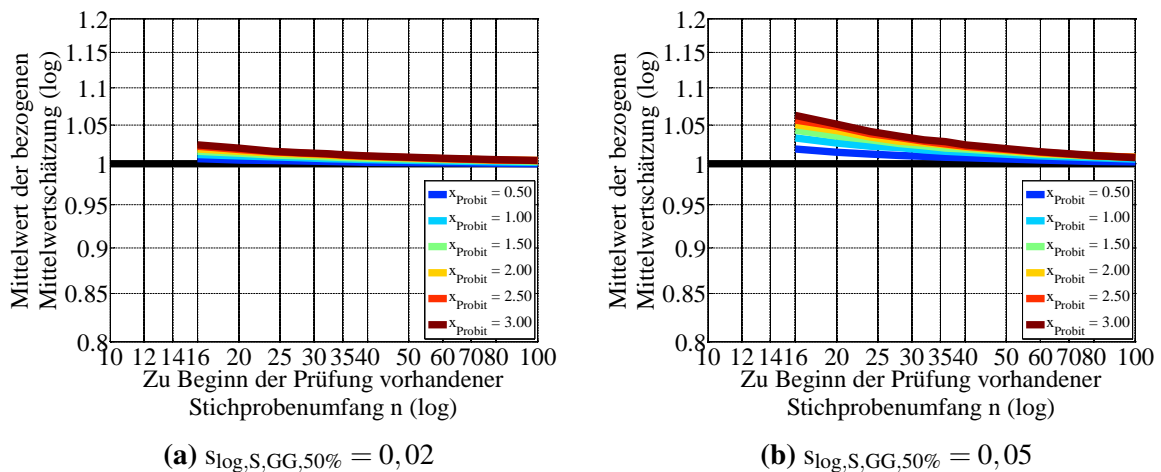


Abbildung 7.33: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Mittelwertschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, Anzahl Prüfhorizonte = 4

Die Schätzgüten für die Mittelwertschätzung, **Abbildung 7.34**, liegen in aus dem Treppenstufen- und Abgrenzungsverfahren bekannten Bereichen, Kapitel 7.1 und Kapitel 7.2. Der Verschiebungsfaktor x_{Probit} spielt für die Schätzgüte eine entscheidende Rolle, **Abbildung 7.34**. Im Falle der hier betrachteten vier Prüfhorizonte werden mit einem Verschiebungsfaktor von $x_{\text{Probit}} \approx 1,0 \dots 1,5$ die besten Mittelwertschätzungen erhalten.

Für kleine Verschiebungsfaktoren $x_{\text{Probit}} < 1,0$ verbessert sich die Schätzgüte aufgrund der zu eng gewählten Horizonte mit zunehmendem Stichprobenumfang nicht, **Abbildung 7.34**. Die Horizonte liegen zu dicht beieinander, so dass es bei kleinen Fehleinschätzungen auf den Prüfhorizonten zu einer starken Übersetzung des Fehlers kommt.

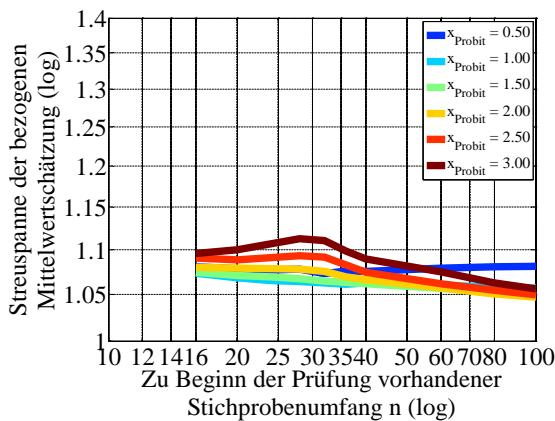
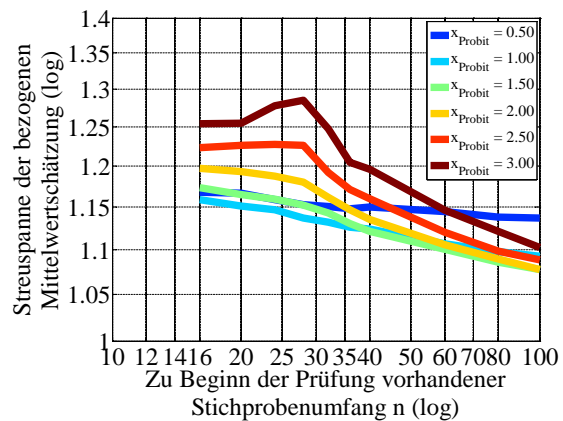
(a) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,02$ (b) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$

Abbildung 7.34: Schätzgüte (Streuweite) der bezogenen Mittelwertschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, Anzahl Prüfhorizonte = 4

Ist der Verschiebungsfaktor x_{Probit} zu groß gewählt, dann fallen die äußeren Lasthorizonte aus der Auswertung heraus, da sie z.B. nur Brüche enthalten. Die inneren Prüfhorizonte liefern sehr ähnliche Ergebnisse, da sie nahe dem logarithmischen Mittelwert liegen. Ist der Stichprobenumfang zusätzlich klein, hier z.B. $n = 16$ (4 Proben je Prüfhorizont), ergeben sich geringere Streuspannen als bei höheren Stichprobenumfängen, **Abbildung 7.34**. Grund dafür ist die geringe Variantenvielfalt auf den Prüfhorizonten, die bei kleinen Stichprobenumfängen ein auswertbares Ergebnis produzieren kann. Extrembeispiel: Je zwei Proben auf zwei Prüfhorizonten ergeben neun mögliche Kombinationen, von denen nur eine auswertbar ist. Mit zunehmendem Stichprobenumfang steigt die Variantenvielfalt der Ergebnisse und damit die Streuspanne. Dieser Anstieg ist zunächst stärker als die Verbesserung der Schätzgüte aufgrund des zunehmenden Stichprobenumfangs. Ist der Stichprobenumfang ausreichend hoch, stellt sich der typische, fallende Kurvenverlauf über dem eingesetzten Stichprobenumfang ein, **Abbildung 7.34**.

Beispiel:

Für ein Bauteil ist der Mittelwert der Langzeitfestigkeit mit dem Probitverfahren zu ermitteln. Mit Hilfe von Literaturwerten, z.B. [Aden 01], wird eine Vorabschätzung der mittleren, logarithmischen Standardabweichung zu $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$ durchgeführt. Vier Prüfhorizonte sollen verwendet werden. Der Verschiebungsfaktor beträgt $x_{\text{Probit}} = 1,0$. Der geschätzte Mittelwert soll in 80 % aller Fälle nicht mehr als Faktor $1,06$ ($T = 1,06^2 = 1,12$) von der Grundgesamtheit abweichen. Aus **Abbildung 7.34** folgt, dass zu Beginn der Prüfung ein Stichprobenumfang von $n > 40$ zur Verfügung stehen muss, damit die Anforderungen erfüllt werden können.

7.4.3 Ergebnisse der Standardabweichungsschätzung

Der Verschiebungsfaktor x_{Probit} hat einen erkennbaren Einfluss auf die Standardabweichungsschätzung, **Abbildung 7.35** und **Abbildung 7.36**. Bei Verschiebungsfaktoren $x_{\text{Probit}} \leq 1,0$ kommt es zu einer Unterschätzung der logarithmischen Standardabweichung. Die Prüfhorizonte liegen in diesem Fall dicht beieinander und liefern alle ähnliche Ergebnisse. Häufig kommt es dazu, dass die Versuchsreihe nicht auswertbar ist, **Abbildung 7.37**. Auswertbar sind vor allem die Versuchsreihen, die die Gerade im Wahrscheinlichkeitspapier zu steil schätzen, die logarithmische Standardabweichung wird unterschätzt. Verschiebungsfaktoren $x_{\text{Probit}} \gg 1,0$ führen zu einer Überschätzung der logarithmischen Standardabweichung. Hier macht sich der Einfluss der systematischen Unterschätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Grundgesamtheiten durch die Gleichung nach [Ross 64] bemerkbar. Insbesondere verursachen jedoch Lasthorizonte mit ausschließlich Durchläufern, dass die Gerade im Wahrscheinlichkeitspapier zu flach und damit die logarithmische Standardabweichung überschätzt wird. Nahezu erwartungstreue Schätzungen werden mit $x_{\text{Probit}} \approx 1,0$ erhalten, **Abbildung 7.35**. Die Schätzung der logarithmischen Standardabweichung ist nahezu unabhängig von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit, **Abbildung 7.35** und **Abbildung 7.36**.

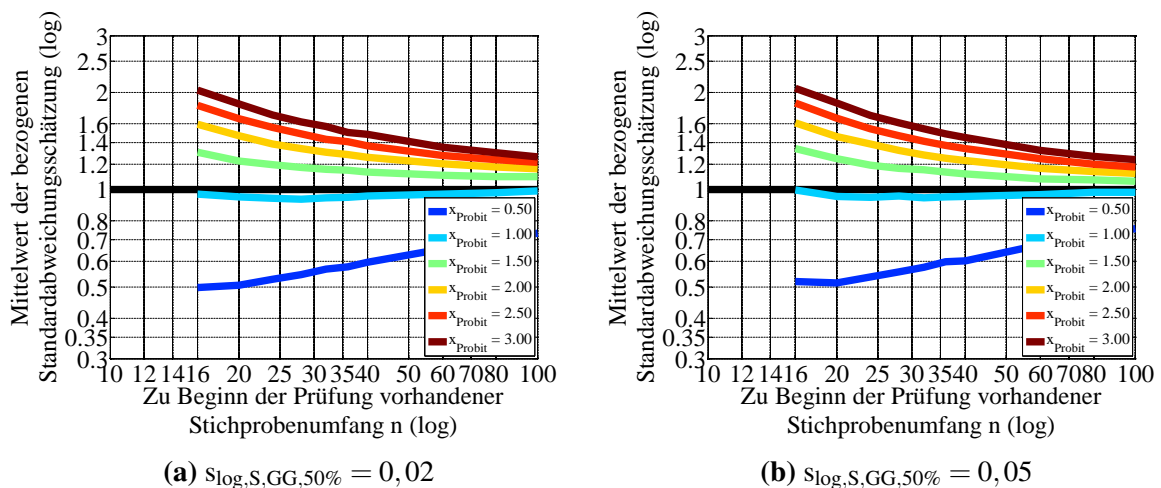
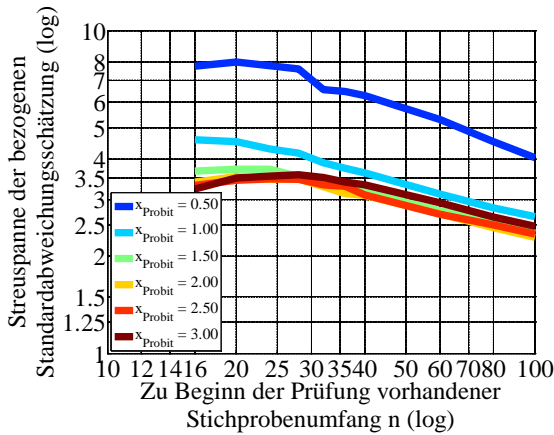


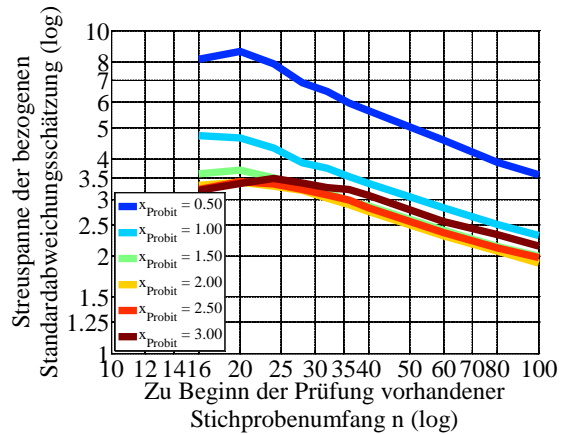
Abbildung 7.35: Mittlere Treffsicherheit der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, Anzahl Prüfhorizonte = 4

Die Schätzgüten der Standardabweichungsschätzung weisen ähnliche Charakteristika wie bei der Mittelwertschätzung auf, die sich identisch begründen lassen. Verschiebungsfaktoren von $x_{\text{Probit}} \approx 1,0$ liefern neben der erwartungstreuen Schätzung auch mit die günstigsten Schätzgüten. Der Anwender kann im Zweifelsfall den Verschiebungsfaktor größer wählen, um eine Standardabweichungsschätzung mit Tendenz zur sicheren Seite zu erhalten. Er läuft dann jedoch Gefahr, dass einzelne Lasthorizonte oder gar die gesamte Versuchsreihe nicht auswertbar ist, **Abbildung 7.37**.

Bei kleinerer, mittlerer, logarithmischer Standardabweichung $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit ist ein erhöhter Anteil nicht auswertbarer Versuche zu verzeichnen, **Abbildung 7.37**. Grund dafür ist die zufällige Wahl des Startwert, die unabhängig ist von der mittleren, logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit. Ist diese groß, dann ist auch bei schlecht gewählten Startwert die Wahrscheinlichkeit hoch, auf einem Prüfhorizont Brüche und Durchläufer zu erhalten, so dass die Versuchsreihe auswertbar ist.

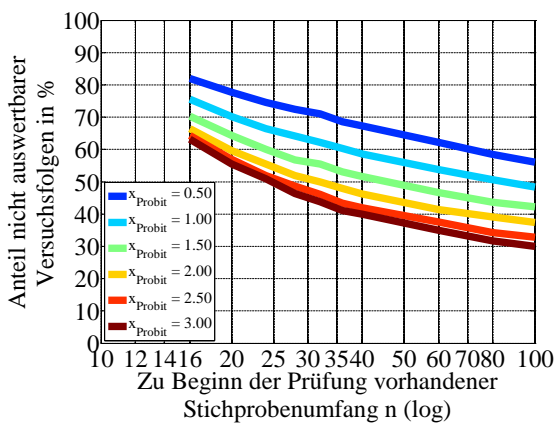


(a) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,02$

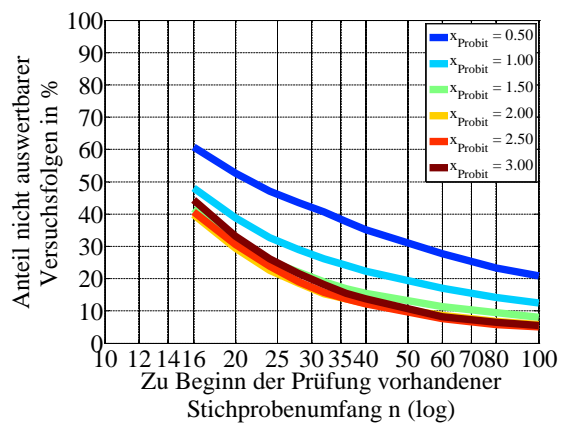


(b) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$

Abbildung 7.36: Schätzgüte (Streuspanne) der bezogenen Standardabweichungsschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, Anzahl Prüfhorizonte = 4



(a) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,02$



(b) $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$

Abbildung 7.37: Anteil nicht auswertbarer Versuchsreihen für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n und verschiedene, mittlere, logarithmische Standardabweichungen $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit, Anzahl Prüfhorizonte = 4

Grundsätzlich benötigt das Probitverfahren einen vergleichsweise hohen Stichprobenumfang, damit die Versuchsfolge mit hoher Wahrscheinlichkeit auswertbar ist. Für die in der Betriebsfestigkeit häufig verwendeten Stichprobenumfänge von $n < 20$ sind in der Regel mehr als 40 % aller Versuchsreihen nicht auswertbar, **Abbildung 7.37**. An dieser Stelle sei angemerkt, dass

sich dieser Anteil durch eine optimierte Prüfhorizontplatzierung, z.B. durch Einbeziehen von Zwischenergebnissen, voraussichtlich verringern lässt.

Beispiel 1:

Ein Versuchsingenieur hat einen Probitversuch mit $n = 20$ Proben und einem Verschiebungsfaktor von $x_{\text{Probit}} = 1,0$ durchgeführt, da er vier Prüfhorizonte verwendet hat, vgl. **Abbildung 7.35**. Auf Basis von Erfahrungswerten hat er die mittlere, logarithmische Standardabweichung $s_{\log,S,GG,50\%}$ der Grundgesamtheit abgeschätzt. Die aus dem Versuch ermittelte, logarithmische Standardabweichung beträgt $s_{\log,S,SP} = 0,048$. Zur Weiterverwendung dieser logarithmischen Standardabweichung soll ein Sicherheitsfaktor zum Einsatz kommen, der es ermöglicht, dass die Standardabweichungsschätzung in 90 % aller Fälle auf der sicheren Seite liegt. **Abbildung 7.36** kann der gesuchte Sicherheitsfaktor zu $\sqrt{T} = \sqrt{4,65} = 2,16$ entnommen werden. Hier sei erneut darauf hingewiesen, dass die Schätzung der logarithmischen Standardabweichung praktisch unabhängig ist von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit.

Beispiel 2:

Wird der in Beispiel 1 genannte Versuch unter sonst gleichen Bedingungen mit einem Stichprobenumfang von $n = 36$ durchgeführt, kann der Sicherheitsfaktor auf $\sqrt{T} = \sqrt{3,53} = 1,88$ reduziert werden, **Abbildung 7.36**.

7.4.4 Empfehlungen für das Probitverfahren

Wie auch die anderen betrachteten Verfahren benötigt das Probitverfahren eine möglichst gute Platzierung der Lasthorizonte. Dazu sollte die Langzeitfestigkeit vor dem Versuch z.B. aus Erfahrungen oder mittels rechnerischer Wöhlerlinien, [Berg 99], [FKM 12], [Gude 99], [Marq 04], abgeschätzt werden. Die Platzierung der Lasthorizonte kann mit dem vorgeschlagenen Verfahren in Abhängigkeit einer vorabgeschätzten, logarithmischen Standardabweichung, z.B. aus [Aden 01], und einem Verschiebungsfaktor x_{Probit} erfolgen. **Tabelle 7.1** gibt die aus den Simulationen gefundenen Richtwerte für die Verschiebungsfaktoren in Abhängigkeit der Anzahl an Prüfhorizonten an. Mit den Richtwerten lassen sich erwartungstreue Schätzungen von Mittelwert und Standardabweichung realisieren.

Anzahl Prüfhorizonte	x_{Probit}
3	1,0
4	1,0
6	1,5
8	2,0

Tabelle 7.1: Richtwerte für den Verschiebungsfaktor x_{Probit} in Abhängigkeit der Anzahl der Prüfhorizonte

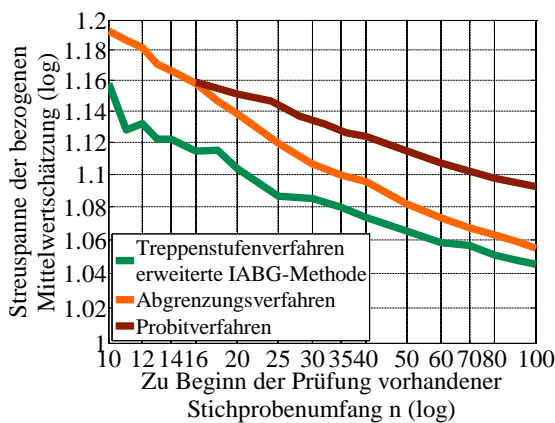
Zur Abschätzung des benötigten Stichprobenumfangs lassen sich die ermittelten, erreichbaren Schätzgüten verwenden. Sie dienen ebenfalls der Ableitung von statistisch begründeten Sicherheitsbeiwerten.

7.5 Empfehlungen für Experimente im Langzeitfestigkeitsgebiet

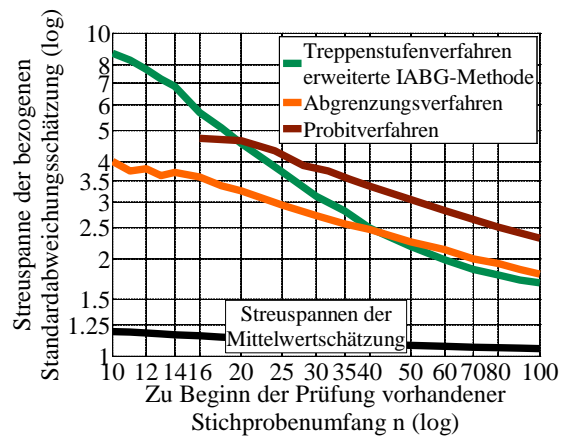
Nachfolgend werden das Treppenstufenverfahren mit Auswertung nach erweiterter IABG-Methode, das Abgrenzungsverfahren und das Probitverfahren miteinander verglichen. Alternativ zur erweiterten IABG-Methode kann das Treppenstufenverfahren auch mit der Maximum-Likelihood-Methode inklusive der vorgeschlagenen, erwartungstreuen Korrektur ausgewertet werden, jedoch mit etwas höherem, rechnerischem Aufwand. Die Maximum-Likelihood-Methode kann insbesondere bei Verdacht auf zu klein gewählten Stufensprung eine vorteilhafte Alternative darstellen. Die Auswertemethode nach Dixon-Mood für das Treppenstufenverfahren greift häufig auf die universelle Maximum-Likelihood-Methode zurück.

Die Auswertemethode nach Deubelbeiss für das Treppenstufenverfahren und das kombinierte Verfahren nach Klubberg scheiden für eine Empfehlung aus. Sie besitzen Risiken für den Anwender, die er im Vorfeld nicht beeinflussen kann. Für die mittleren Treffsicherheiten der Standardabweichungsschätzungen liegen in beiden Fällen Abhängigkeiten von der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit und vom Verhältnis aus logarithmischer Standardabweichung der Grundgesamtheit zum logarithmierten Stufensprung vor. Diese beiden Größen sind dem Versuchsingenieur in der Versuchsplanung nicht oder nur unzulänglich bekannt. Erkennbare Fehleinschätzungen bezüglich der logarithmischen Standardabweichung können die Folge sein.

Die für den Vergleich ausgewählten Verfahren und Auswertemethoden liefern nahezu erwartungstreue Schätzungen für Mittelwert und Standardabweichung, wenn sie vom Versuchsingenieur korrekt angewendet werden. Daher ist nur ein Vergleich der Schätzgüten erforderlich, **Abbildung 7.38**.



(a) Mittelwertschätzung



(b) Standardabweichungsschätzung

Abbildung 7.38: Vergleich der Schätzgüten (Streuspannen) für Mittelwert- und Standardabweichungsschätzung für verschiedene, zu Beginn der Prüfung vorhandene Stichprobenumfänge n , $s_{\log,S,GG,50\%} = 0,05$, $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$, $x_{Abgr} = 2,0$, $x_{Probit} = 1,0$, Anzahl Prüfhorizonte Probitverfahren = 4

Soll nur der Mittelwert der Langzeitfestigkeit geschätzt werden, dann ist das Treppenstufenverfahren mit der IABG-Auswertemethode zu empfehlen. Neben einer einfachen und fehlerrobusten Versuchsführung liefert es für die Mittelwertschätzung die besten Schätzgüten, **Abbildung 7.38 links**. Das Abgrenzungsverfahren und das Probitverfahren weisen jedoch keine nennenswert schlechteren Schätzgüten aus, **Abbildung 7.38 links**. Sie besitzen allerdings insbesondere bei kleinen Stichprobenumfängen die erhöhte Gefahr, dass die Versuchsfolge nicht auswertbar ist.

Ist neben dem Mittelwert auch die Schätzung der logarithmischen Standardabweichung von Interesse, dann sollte für Stichprobenumfänge $n < 40$ das Abgrenzungsverfahren verwendet werden, **Abbildung 7.38 rechts**. Nachteil des Abgrenzungsverfahrens ist der vergleichsweise hohe Anteil nicht auswertbarer Versuchsfolgen bei Stichprobenumfängen $n \ll 40$. Bei größeren Stichprobenumfängen als $n = 40$ liefern Treppenstufen- und Abgrenzungsverfahren vergleichbare Ergebnisse. Das Treppenstufenverfahren kann einen ungünstig gewählten Startwert bei großen Stichprobenumfang ausgleichen, da die Versuchsfolge sich automatisch um den Mittelwert konzentriert. Das Abgrenzungsverfahren besitzt diesen Vorteil nicht. Könnten die Prüfhorizonte ideal platziert werden, würde das Abgrenzungsverfahren immer eine bessere Schätzung der logarithmischen Standardabweichung liefern als das Treppenstufenverfahren.

Das Probitverfahren schätzt sowohl Mittelwert als auch Standardabweichung mit einer geringeren Güte als das Abgrenzungsverfahren. Beim Abgrenzungsverfahren können die Proben in den Randbereichen vergleichsweise weit entfernt vom Mittelwert platziert werden. Sie befinden sich damit auf wertvollen Prüfhorizonten für die Standardabweichungsschätzung. Das Probitverfahren verwendet teilweise Prüfhorizonte nahe dem Mittelwert, wo sie bezüglich der Standardabweichungsschätzung eine geringe Aussagekraft besitzen.

Allen Verfahren ist gemeinsam, dass insbesondere für die in der Betriebsfestigkeit üblichen, kleinen Stichprobenumfänge von $n \leq 20$ eine sorgfältige Versuchsplanung vorausgehen muss. Dies umfasst eine Abschätzung des Langzeitfestigkeitsbereichs und der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit. Erfahrungen, rechnerische Wöhlerlinien, [Berg 99], [FKM 12], [Gude 99], [Marq 04], und Literaturwerte, z.B. [Aden 01], können dabei eine wesentliche Hilfe sein.

Auf Basis der vorabgeschätzten Standardabweichung $s_{\log,S,GG,50\%}$ sollte für Treppenstufen- und Abgrenzungsverfahren der Stufensprung d so gewählt werden, dass gilt $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$. Dies stellt den besten Kompromiss bzgl. sinnvoll auswertbarer Versuchsfolge und hoher Schätzgüte für die Standardabweichungsschätzung dar. Der optimale Verschiebungsfaktor für das Abgrenzungsverfahren beträgt $x_{Abgr} = 2,0$. Für das Probitverfahren ist der Verschiebungsfaktor x_{Probit} je nach Anzahl der belegten Prüfhorizonte zu wählen, **Tabelle 7.2**.

Anzahl Prüfhorizonte	x_{Probit}
3	1,0
4	1,0
6	1,5
8	2,0

Tabelle 7.2: Richtwerte für den Verschiebungsfaktor x_{Probit} in Abhängigkeit der Anzahl der Prüfhorizonte

Die Festlegung des benötigten Stichprobenumfangs erfolgt anhand geforderter Schätzgüten. Die Forderungen werden mit den erreichbaren Werten verglichen, Kapitel 7.1 bis Kapitel 7.4. Nach erfolgter Versuchsauswertung können die erreichbaren Schätzgüten als Sicherheitsbeiwerte Verwendung finden. Dadurch lassen sich die Schätzwerte aus der Stichprobe auf erhöhte Sicherheiten (Konfidenzniveaus) umrechnen.

8 Literaturverzeichnis

- [ABF 11] Hück, M. ; Thrainer, L. ; Schütz, W.: *Berechnung von Wöhlerlinien für Bauteile aus Stahl, Stahlguß und Grauguß*. Düsseldorf : VDEh, 1980 (Bericht Nr. ABF 11). - VDEh-Vorhaben ABF 11
- [Aden 01] Adenstedt, R.: *Streuung der Schwingfestigkeit*, Clausthal-Zellerfeld, TU Clausthal, Fakultät Bergbau, Hüttenwesen und Maschinenwesen, Diss., 2001
- [Ande 52] Anderson, T.-W. ; Darling, D.-A.: Asymptotic Theory of Certain Goodness of Fit Criteria Based on Stochastic Processes. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 23 (1952-06), S. 193-212
- [Barn 75] Barnett, V.: Probability Plotting Methods and Order Statistics. In: *Journal of the Royal Statistical Society* 24 (1975-01), S. 95-108
- [Basq 10] Basquin, O.-H.: The Exponential Law Of Endurance Test. In: American Society For Testing Materials (Hrsg.): *Proceedings Of The Thirteen Annual Meeting*. New Jersey : American Society For Testing Materials, 1910 (Volume X), S. 625-630
- [Behr 13] Behrends, E.: *Elementare Stochastik*. 1. Aufl. Wiesbaden : Springer, 2013
- [Berg 99] Bergmann, J. ; Thumser, R.: *Synthetische Wöhlerlinien für Eisenwerkstoffe*. Düsseldorf : Verlag und Vertriebsgesellschaft, 1999 (Studiengesellschaft Stahlanwendungen P 249). - AiF-Nr 10733 N
- [Bert 08] Bertsche, B.: *Reliability in Automotive and Mechanical Engineering : Determination of Component and System Reliability*. Berlin : Springer, 2008
- [Blom 58] Blom, G.: *Statistical Estimates and Transformed Beta-Variables*. New York : Wiley, 1958
- [Buxb 92] Buxbaum, O.: *Betriebsfestigkeit : Sichere und wirtschaftliche Bemessung schwingbruchgefährdeter Bauteile*. 2. Aufl. Düsseldorf : Stahleisen, 1992
- [Dago 86] D'Agostino, R.-B. ; Stephens, M.-A.: *Goodness-Of-Fit-Techniques*. New York : Dekker, 1986
- [Deng 75] Dengel, D.: Die arcsin \sqrt{P} -Transformation : ein einfaches Verfahren zur grafischen und rechnerischen Auswertung geplanter Wöhlerversuche. In: *Zeitschrift für Werkstofftechnik* 6 (1975-08), S. 253-261
- [Deub 74] Deubelbeiss, E.: Dauerfestigkeitsversuche mit einem modifizierten Treppenstufenverfahren. In: *Materialprüfung* 16 (1974-08), S. 240-244
- [Devr 96] Devroye, L.: Random Variate Generation In One Line Of Code. In: Charnes, J.-M. ; Morrice, D.-J. ; Brunner, D.- T. ; Swain, J.-J. (Hrsg.): *Winter Simulation Conference Proceedings*. Coronado : WSC, 1996, S. 265-272

- [DIN 743] Norm DIN 743 2008. *Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen*
- [DIN 50100] Norm DIN 50100 1978. *Dauerschwingversuch*
- [Dixo 48] Dixon, W.-J. ; Mood, A.-M.: A Method for Obtaining and Analyzing Sensitivity Data. In: *Journal of the American Statistical Association* 43 (1948-03), S. 109-126
- [Dorf 61] Dorff, D.: *Vergleich verschiedener statistischer Transformationsverfahren auf ihre Anwendbarkeit zur Ermittlung der Dauerschwingfestigkeit*, Berlin, TU Berlin, Fakultät für Maschinenwesen, Diss., 1961
- [Ellm 11] Ellmer, F. ; Hinkelmann, K.: *Datenbank und Auswertesystem Betriebsfestigkeit*; Frankfurt : VDMA, 2011 (FKM-Forschungsheft 313). - FKM-Vorhaben 288
- [EN 515] Norm EN 515 1993. *Aluminium und Aluminiumlegierungen - Halbzeug - Bezeichnung der Werkstoffzustände*
- [EN 13103] Norm DIN EN 13103 2012. *Bahnanwendungen - Radsätze und Drehgestelle - Laufradsatzwellen - Konstruktions- und Berechnungsrichtlinie*
- [Fahr 07] Fahrmeir, L. ; Künstler, R. ; Pigeot, I. ; Tutz, G.: *Statistik*. 6. Aufl. Berlin : Springer, 2007
- [Fahr 09] Fahrmeir, L. ; Kneib, T. ; Lang, S.: *Regression*. 2. Aufl. Heidelberg : Springer, 2009
- [Finn 47] Finney, D.-J.: *Probit Analysis*. Cambridge : Cambridge University Press, 1947
- [Fish 22] Fisher, R.-A.: On the Dominance Ratio. In: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 42 (1922), S. 321-341
- [FKM 12] Rennert, R. ; Eckehardt, K. ; Vormwald, M. ; Esderts, A. ; Siegele, D.: *Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile*. 6. Aufl. Frankfurt : VDMA, 2012
- [FKM 292] Schneider, N. ; Eufinger, J. ; Pyttel, B. ; Berger, C.: *VHCF-Variable Amplitude : Bauteilauslegung unter Berücksichtigung von Beanspruchungen mit variablen Amplituden und sehr hohen Schwingspielzahlen*. Frankfurt : FKM, 2012 (FKM-Heft 317). - FKM-Vorhaben 292
- [FVA 304] Mauch, H. ; Zenner, H.: *Statistische Methoden zur Beurteilung von Bauteillebensdauer und Zuverlässigkeit und ihre beispielhafte Anwendung auf Zahnräder*. Frankfurt : FVA, 1999 (FVA- Forschungsheft 591). - FVA-Vorhaben 304
- [FVA 554-I] Ziegler, A. ; Michaelis, K.: *Systemlebensdauerprüfung*. Frankfurt : FVA, 2011 (FVA- Forschungsheft 978). - FVA-Vorhaben 554-I
- [Gude 99] Gudehus, H. ; Zenner, H.: *Leitfaden für eine Betriebsfestigkeitsrechnung*. 4. Aufl. Düsseldorf : Stahleisen, 1999

- [Haib 06] Haibach, E.: *Betriebsfestigkeit : Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung*. 3. Aufl. Berlin : Springer, 2006
- [Haib 70] Haibach, E.: Schwingfestigkeits-Untersuchung an Kreuzstößen mit K-Naht aus dem Grundwerkstoff Stahl St 37. In: *Bericht des Laboratoriums für Betriebsfestigkeit LBF* (1970), Nr. FB-90
- [Hart 09] Hartung, J. ; Elpelt, B. ; Klösener, K.-H.: *Statistik*. 15. Aufl. München : Oldenbourg, 2009
- [Haze 14] Hazen, A.: Storage to be provided in impounding reservoirs for municipal water supply. In: *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 77 (1914), S. 1539-1669
- [Henz 13] Henze, N.: *Stochastik für Einsteiger*. 10. Aufl. Wiesbaden : Springer, 2013
- [Hück 83] Hück, M.: Ein verbessertes Verfahren für die Auswertung von Treppenstufenversuchen. In: *Zeitschrift für Werkstofftechnik* 14 (1983-12), S. 406-417
- [Hück 94] Hück, M.: Auswertung von Stichproben normalverteilter, quantitativer Merkmalsgrößen. In: *Z. Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 25 (1994-01), S. 20-29
- [ISO 281] Norm DIN ISO 281 2010. *Wälzlager - Dynamische Tragzahlen und nominelle Lebensdauer*
- [ISO 4017] Norm DIN EN ISO 4017 2014. *Mechanische Verbindungselemente - Sechskantschrauben mit Gewinde bis Kopf*
- [ISO 6336] Norm ISO 6336 2006. *Tragfähigkeitsberechnung von gerad- und schrägverzahnten Stirnrädern*
- [Klub 95] Klubberg, F. ; Beiss, P.: Modifizierte Prüf- und Auswertemethodik im Übergangsbereich zur Dauerschwingfestigkeit. In: VDI (Hrsg.): *Effizienzsteigerung durch innovative Werkstofftechnik*. Düsseldorf : VDI, 1995 (VDI-Berichte 1151), S. 777-780
- [Liu 01] Liu, J.: *Dauerfestigkeitsberechnung metallischer Werkstoffe*, Clausthal-Zellerfeld, TU Clausthal, Fakultät Bergbau, Hüttenwesen und Maschinenwesen, Habil., 2001
- [Loca 55] Locati, L.: Le prove di fatica come ausilio alla progettazione ed alla produzione. In: *Metallurgia Italiana* 47 (1955-09), S. 301-308
- [Lund 47] Lundberg, G. ; Palmgren, A.: Dynamic Capacity of Rolling Bearings. In: *Handlingar Proceedings* 196, S. 1-50
- [Lund 50] Lundberg, G. ; Palmgren, A.: *Dynamische Tragfähigkeit von Rollenlagern*. Schweinfurt : SKF, 1950

- [Maen 66] Maennig, W.-W.: *Untersuchung zur Planung und Auswertung von Dauerschwingversuchen an Stahl in den Bereichen der Zeit- und Dauerfestigkeit*, Berlin, TU Berlin, Diss., 1966
- [Maen 77] Maennig, W.-W.: Das Abgrenzungsverfahren, eine kostensparende Methode zur Ermittlung von Schwingfestigkeitswerten. In: *Materialprüfung* 19 (1977-08), S. 280-289
- [Mann 75] Mann, N.-R. ; Fertig, K.-W.: A Goodness-of-Fit Test for the Two Parameter vs. Three Parameter Weibull : Confidence Bounds for Threshold. In: *Technometrics* 17 (1975-02), S. 237-245
- [Marq 04] Marquardt, C.: *Lebensdauerabschätzung schwingend beanspruchter Bauteile mittels Künstlich Neuronaler Netze*, Clausthal-Zellerfeld, TU Clausthal, Fakultät Bergbau, Hüttenwesen und Maschinenwesen, Diss., 2004
- [Mart 11a] Martin, A. ; Hinkelmann, K. ; Esderts, A.: Zur Auswertung von Schwingfestigkeitsversuchen im Zeitfestigkeitsbereich. Tl. I. In: *MP Materials Testing* 53 (2011-09), S. 502-512
- [Mart 11b] Martin, A. ; Hinkelmann, K. ; Esderts, A.: Zur Auswertung von Schwingfestigkeitsversuchen im Zeitfestigkeitsbereich. Tl. II. In: *MP Materials Testing* 53 (2011-09), S. 513-521
- [Mats 98] Matsumoto, M. ; Nishimura, T.: Mersenne Twister : A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator. In: *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation* 08 (1998-01), S. 3-30
- [Moye 93] Moyer, Ch.-A.: Lebensdauer- und Leistungsvorhersage für moderne Kegelrollenlager. In: *Konstruktion : Zeitschrift für Produktentwicklung und Ingenieurwerkstoffe* 45 (1993-04), S. 138-144
- [Müll 78] Müller, R.: Die Streuung der Schwingfestigkeit. In: *Zeitschrift für Werkstofftechnik* 9 (1978-09), S. 316-321
- [Müll 12] Müller, C. ; Hinkelmann, K. ; Wächter, M. ; Masendorf, R. ; Esderts, A.: Zur Wiederverwendung von Durchläufern im Treppenstufenversuch. In: *MP Materials Testing* 54 (2012-11/12), S. 786-792
- [Müll 14] Müller, C. ; Hinkelmann, K. ; Masendorf, R. ; Esderts, A.: Zur Treffsicherheit der experimentellen Dauerfestigkeitsschätzung. In: *TU Clausthal Fakultät 3 Technical Report Series* (2014), Nr. 2
- [Niem 06] Niemann, G. ; Winter, H. ; Höhn, B.-R.: *Maschinenelemente : Band1: Konstruktion und Berechnung von Verbindungen, Lagern und Wellen*. 4. Aufl. Berlin : Springer, 2006
- [Palm 64] Palmgren, A.: *Grundlagen der Wälzlagertechnik*. 3. Aufl. Stuttgart : Franckh'sche Verlagshandlung, 1964

- [Pear 00] Pearson, K.: On the Criterion that a given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from Random Sampling. In: *Philosophical Magazine* 50 (1900-5), S. 157-175
- [Poll 06] Pollak, R. ; Palazotto, A. ; Nicholas, T.: A simulation-based investigation of the staircase method for fatigue strength testing. In: *Mechanics of Materials* 38 (2006-12), S. 1170-1181
- [Prot 48] Prot, E.-M.: L'essai de fatigue sous charge progressive : Une nouvelle technique d'essai des materiaux. In: *Revue de Métallurgie* 45 (1948-12), S. 481-489
- [Rada 07] Radaj, D. ; Vormwald, M.: *Ermüdungsfestigkeit*. 3. Aufl. Berlin : Springer, 2007
- [Rey 11] Rey, g.-D. ; Wender, K.-F.: *Neuronale Netze : Eine Einführung in die Grundlagen, Anwendungen und Datenauswertung*. 2. Aufl. Bern : Hans Huber, 2011
- [Rieg 12] Rieg, F. ; Steinhilper, R.: *Handbuch Konstruktion*. München : Hanser, 2012
- [Ross 64] Rossow, E.: Eine einfache Rechenschiebernäherung an die den normal scores entsprechenden Prozentpunkte. In: *Zeitschrift für wirtschaftliche Fertigung* 59 (1964-12), S. 596-597
- [Sach 06] Sachs, L. ; Hedderich, J.: *Angewandte Statistik : Methodensammlung mit R*. 12. Aufl. Berlin : Springer, 2006
- [Sand 08] Sander, M.: *Sicherheit und Betriebsfestigkeit von Maschinen und Anlagen*. Berlin : Springer, 2008
- [Schä 08] Schäfer, H.-J.: *Auswertalgorithmus auf der Basis einer Modifikation des Goniometrischen Modells zur stetigen Beschreibung der Wöhlerkurve vom Low-Cycle-Fatigue- bis in den Ultra-High-Cycle-Fatigue-Bereich*, Aachen, RWTH Aachen, Fakultät für Maschinenwesen, Diss., 2008
- [Schr 55] Schreiber, W.: *Beitrag zur Lösung einiger Probleme der Dauerschwingbeanspruchung im Gebiet der Zeitfestigkeit durch Anwendung statistischer Verfahren*, Braunschweig, TH Braunschweig, Diss., 1955
- [Schr 63] Schreiber, H.-H.: Zur mathematisch-statistischen Auswertung von Lebensdauerersuchen mit Wälzlagern. In: *Zeitschrift für wirtschaftliche Fertigung* 58 (1963-06/07), S. 293-326 und S. 337-381
- [Seif 04] Seifried, A.: Zur Statistik in der Betriebsfestigkeit. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 35 (2004-02), S. 93-111
- [SEP 1240] VDEh (Hrsg.): *Stahl-Eisen-Prüfblatt 1240 - Prüf- und Dokumentationsrichtlinie für die experimentelle Ermittlung mechanischer Kennwerte von Feinblechen aus Stahl für die CAE-Berechnung*. 1. Ausgabe. Düsseldorf : Stahleisen, 2006

- [Shap 65] Shapiro, S.-S. ; Wilk, M.-B.: An Analysis of Variance Test for Normality. In: *Biometrika* 52 (1965-12), S. 591-611
- [Spick 07] Spickenreuther, M.: *Untersuchungen zur Berechnung der Dauerfestigkeit von randschichtgehärteten Dieseleinspritzdüsen*, Ilmenau, TU Ilmenau, Fakultät Maschinenbau, Diss., 2007
- [Stan 70] Stange, K.: *Angewandte Statistik : Erster Teil : Eindimensionale Probleme*. Berlin : Springer, 1970
- [Step 74] Stephens, M.-A.: EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons. In: *Journal of the American Statistical Association* 69 (1974-09), S. 730-737
- [Stud 08] Student: The Probable Error of a Mean. In: *Biometrika* 06 (1908-03), S. 1-25
- [Sons 05] Sonsino, C.-M.: Dauerfestigkeit - Eine Fiktion. In: *Konstruktion* 57 (2005-04), S. 87-92
- [Tana 82] Tanaka, Tsuneshichi.: *Data Book On Fatigue Strength Of Metallic Materials*. Kyoto : The Society Of Materials Science Japan, 1982
- [Thom 78] Thomala, W.: *Beitrag zur Dauerhaltbarkeit von Schraubenverbindungen*, Clausthal-Zellerfeld, TH Darmstadt, Diss., 1978
- [Wall 11] Wallin, K.-R.-W.: Statistical uncertainty in the fatigue threshold staircase test method. In: *International Journal of Fatigue* 33 (2011-03), S. 354-362
- [Weib 39] Weibull, W.: A Statistical Theory Of The Strength Of Materials. In: *Ingeniörsvetenskapsakademiens Handlingar* 151, S. 1-45
- [Weib 51] Weibull, W.: A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. In: *Journal Of Applied Mechanics* 18 (1951-09), S. 293-297

9 Symbolverzeichnis

Symbol	Beschreibung
α	Signifikanzniveau
a	Gewichte des Shapiro-Wilk-Tests
a_H	Parameter der Näherungsgleichung für die erwartungstreue Standardabweichungsschätzung nach der IABG-Methode
a_S	Lageparameter der arcsin-Verteilung
A_D	Hilfsgröße zur Auswertung einer Treppenstufenfolge nach [Dixo 48]
A_H	Hilfsgröße zur Auswertung einer Treppenstufenfolge nach [Hück 83]
b_{GG}	Weibullformparameter der Grundgesamtheit
b_H	Parameter der Näherungsgleichung für die erwartungstreue Standardabweichungsschätzung nach der IABG-Methode
b_S	Formparameter der arcsin-Verteilung
B_D	Hilfsgröße zur Auswertung einer Treppenstufenfolge nach [Dixo 48]
B_H	Hilfsgröße zur Auswertung einer Treppenstufenfolge nach [Hück 83]
C	Lageparameter der Wöhlerlinie
c_{MLkorr}	Korrekturfaktor zur erwartungstreuen Korrektur der Standardabweichungsschätzung mit der Maximum-Likelihood-Methode
d	Stufensprung (Faktor)
f_i	Anzahl der wertbaren Ereignisse auf einer Laststufe im Treppenstufenversuch
F_a	Kraftamplitude
F_D	Hilfsgröße zur Auswertung einer Treppenstufenfolge nach [Dixo 48]
F_H	Hilfsgröße zur Auswertung einer Treppenstufenfolge nach [Hück 83]
H_0	Nullhypothese eines Testverfahrens, z.B. des Shapiro-Wilk-Tests, [Shap 65]
H_1	Gegenhypothese eines Testverfahrens, z.B. des Shapiro-Wilk-Tests, [Shap 65]
i	Positionsnummer/Zählvariable
k	Neigung der Wöhlerlinie im Zeitfestigkeitsgebiet
$k_{50\%,GG}$	Neigung der Wöhlerlinie im Zeitfestigkeitsgebiet der Grundgesamtheit für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 50\%$
$k_{50\%,SP}$	Neigung der Wöhlerlinie im Zeitfestigkeitsgebiet der Stichprobe für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 50\%$
$k_{p,50\%,GG}$	Neigung der Wöhlerlinie im Kurzzeitfestigkeitsgebiet der Grundgesamtheit für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 50\%$

$k_{SaL,50\%,GG}$	Neigung der Wöhlerlinie im Langzeitfestigkeitsgebiet der Grundgesamtheit für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 50 \%$
k_H	Hilfsvarianz der IABG-Methode, [Hück 83]
m	Zählvariable / Anzahl der gezogenen Stichproben / Anzahl der Wiederholungen bei einer Monte-Carlo- Simulation
n	Stichprobenumfang
n_B	Anzahl Brüche
n_D	Anzahl Durchläufer
$n_{Mittelwert}$	Für das Verfahren nach [Klub 95] verwendeter Stichprobenumfang im reinen Treppenstufenversuch zur Schätzung des logarithmischen Mittelwerts
N	Schwingspielzahl
N^*	Koordinatentransformierte Schwingspielzahl (Weibullverteilung)
$N_{0,GG}$	Ausfallfreie Zeit der Grundgesamtheit bei der dreiparametrischen Weibullverteilung
N_2/N_1	Spreizung, Verhältnis der mittleren Lebensdauern der extremalen Lasthorizonte im Zeitfestigkeitsbereich auf Basis der Grundgesamtheit
$N_{50\%,GG}$	Mittelwert der Grundgesamtheit bei logarithmischer Normalverteilung in Lebensdauerrichtung
$N_{50\%,SP}$	Logarithmischer Mittelwert der Stichprobe bei logarithmischer Normalverteilung (geometrischer Mittelwert/Median) in Lebensdauerrichtung
$N_{50\%,SP,50\%}$	50%-Quantil des logarithmischen Mittelwerts der Stichprobe der logarithmischen Normalverteilung in Lebensdauerrichtung
N_L	Ecklastschwingspielzahl
$N_{L,50\%,GG}$	Ecklastschwingspielzahl der Wöhlerlinie der Grundgesamtheit für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von $P_A = 50 \%$
N_P	Knicklastschwingspielzahl
p	Wahrscheinlichkeitsdichte
P	Übereinstimmungswahrscheinlichkeit
P_A	Ausfallwahrscheinlichkeit
r^2	Bestimmtheitsmaß
r_{log-NV}	Bestimmtheitsmaß aus der linearen Regression in einem Wahrscheinlichkeitspapier für die logarithmische Normalverteilung
r_{WBL}	Bestimmtheitsmaß aus der linearen Regression in einem Wahrscheinlichkeitspapier für die Weibullverteilung
R	Spannungsverhältnis

s_{\log}	Standardabweichung logarithmierter Merkmalswerte (= logarithmische Standardabweichung)
$s_{\log,N}$	Standardabweichung der logarithmierten Merkmalswerte (= logarithmische Standardabweichung) in Lebensdauerichtung
$s_{\log,N,GG}$	Standardabweichung der logarithmierten Merkmalswerte der Grundgesamtheit (= logarithmische Standardabweichung) in Lebensdauerichtung
$s_{\log,N,GG,50\%}$	Mittlere Standardabweichung der logarithmierten Merkmalswerte der Grundgesamtheit (= logarithmische Standardabweichung) in Lebensdauerichtung
$s_{\log,N,GG,s}$	Logarithmische Standardabweichung der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit in Lebensdauerichtung
$s_{\log,N,SP}$	Standardabweichung der logarithmierten Merkmalswerte der Stichprobe (= logarithmische Standardabweichung) in Lebensdauerichtung
$s_{\log,S}$	Standardabweichung der logarithmierten Merkmalswerte (= logarithmische Standardabweichung) in Lastrichtung
$s_{\log,S,GG}$	Standardabweichung der logarithmierten Merkmalswerte der Grundgesamtheit (= logarithmische Standardabweichung) in Lastrichtung
$s_{\log,S,GG,50\%}$	Mittlere Standardabweichung der logarithmierten Merkmalswerte der Grundgesamtheit (= logarithmische Standardabweichung) in Lastrichtung
$s_{\log,S,GG,s}$	Logarithmische Standardabweichung der logarithmischen Standardabweichung der Grundgesamtheit in Lastrichtung
$s_{\log,S,SP}$	Standardabweichung der logarithmierten Merkmalswerte der Stichprobe (= logarithmische Standardabweichung) in Lastrichtung
S_a	Spannungsamplitude
S_{a0}	Untester, wertbarer Lasthorizont bei Auswertung einer Treppenstufenfolge nach [Dixo 48] oder [Hück 83]
S_{aL}	Langzeitfest ertragbare Spannungsamplitude bei einer Abbruchschwingspielzahl / Langzeitfestigkeit
$S_{aL,50\%,GG}$	Logarithmischer Mittelwert der Grundgesamtheit bei logarithmischer Normalverteilung (geometrischer Mittelwert/Median) in Lastrichtung (Langzeitfestigkeit)
$S_{aL,50\%,SP}$	Logarithmischer Mittelwert der Stichprobe bei logarithmischer Normalverteilung (geometrischer Mittelwert/Median) in Lastrichtung (Langzeitfestigkeit)
$S_{aL,Start}$	Startwertamplitude einer Versuchsreihe im Langzeitfestigkeitsbereich
$S_{a,max}$	Höchster, belegter Lasthorizont
$S_{a,min}$	Niedrigster, belegter Lasthorizont
S_m	Mittelspannung
T	Streuspanne

T_k	Streuspanne der Neigungsschätzung für rechnerische Wöhlerlinien
T_{NL}	Streuspanne der Ecklastschwingspielzahlschätzung für rechnerische Wöhlerlinien
T_{GG}	Charakteristische Lebensdauer der Weibullverteilung für die Grundgesamtheit
T_{GG}^*	Koordinatentransformierte, charakteristische Lebensdauer der Weibullverteilung für die Grundgesamtheit
T_{SaL}	Streuspanne der Langzeitfestigkeitsschätzung für rechnerische Wöhlerlinien
u	Quantil der Standardnormalverteilung
W	Testgröße des Shapiro-Wilk-Tests
W_{grenz}	Grenze für Testgröße im Shapiro-Wilk-Tests
x_{Abgr}	Verschiebungsfaktor zur Wahl der Lasthorizonte beim Abgrenzungsverfahren
x_{Probit}	Verschiebungsfaktor zur Wahl der Lasthorizonte beim Probitverfahren

10 Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Beschreibung
GG	Grundgesamtheit
KNN	Künstlich Neuronales Netz
SP	Stichprobe
VHCF	Very-High-Cycle-Fatigue

11 Anhang

11.1 Einstufenversuche an Aluminiumschrauben

Zur Erweiterung der Datenbasis mit Horizontenversuchen im Zeitfestigkeitsbereich mit hohem Stichprobenumfang stehen Aluminiumschrauben aus EN AW 7075 T6 zur Verfügung. Bei den Schrauben handelt es sich um Sechskantschrauben M8x50 nach ISO 4017 mit Gewinde annähernd bis Kopf. Die Schrauben besitzen eine transparent eloxierte Oberfläche und werden in Paketen zu $n = 100$ angeliefert. Das Vorhandensein unterschiedlicher Chargen innerhalb eines Pakets kann nicht vollständig ausgeschlossen werden.

Auf einem elektromagnetischen Resonanzprüfstand werden die Schrauben axial einstufig mit einer Prüffrequenz von ca. 80 Hz belastet, **Abbildung 11.1**. Den Schrauben wird eine Stahlmutter bis kurz vor Kopf aufgeschraubt, **Abbildung 11.1**. Dadurch lässt sich erreichen, dass der Bruch grundsätzlich im ersten tragenden Gewindegang auf Höhe der Mutter eintritt.

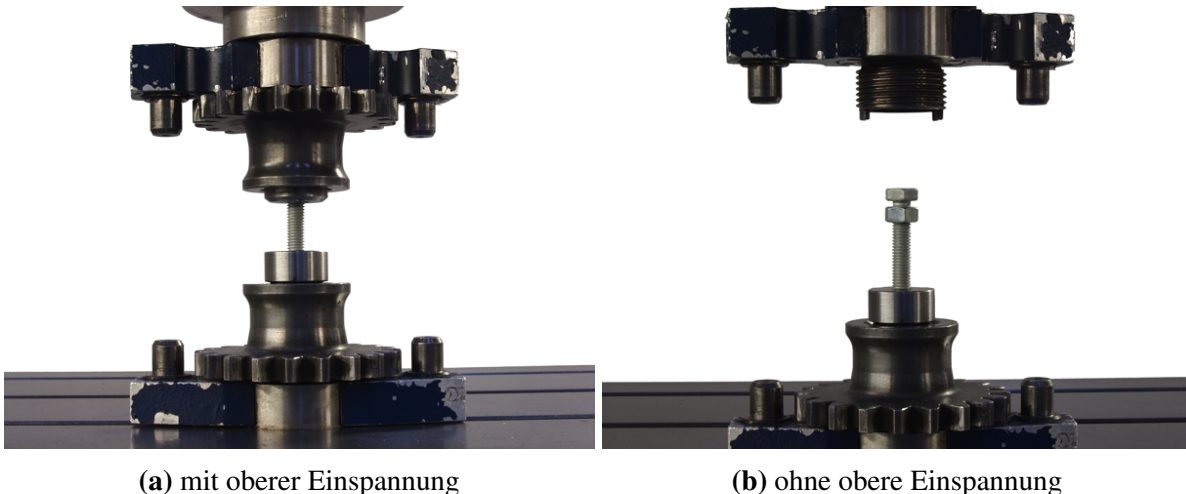


Abbildung 11.1: Spannvorrichtung zur axialen Belastung von Aluminiumschrauben

Tabelle 11.1 gibt eine Zusammenfassung über die geprüften Lasthorizonte und Stichprobenumfänge. **Tabelle 11.2** bis **Tabelle 11.5** sind die Einzelversuchsergebnisse zu entnehmen. In **Abbildung 11.2** bis **Abbildung 11.5** sind die Ergebnisse grafisch dargestellt.

Kraftamplitude F_a / kN	Spannungsverhältnis R	Stichprobenumfang n	Paket
Perlenschnurverfahren	+0,5	15	A
2,0	+0,5	100	B
2,0	+0,5	100	C
1,375	+0,5	100	D

Tabelle 11.1: Übersicht der durchgeführten Einstufenversuche mit Aluminiumschrauben

i	Kraftamplitude F_a / kN	Bruchschwingspielzahl N
1	2,500	10.117
2	2,250	12.356
3	2,250	14.843
4	2,250	20.781
5	2,250	11.300
6	2,250	14.685
7	1,500	87.188
8	1,500	52.550
9	1,500	72.892
10	1,000	270.200
11	1,000	323.835
12	0,875	514.314
13	0,875	727.417
14	2,000	26.187
15	2,000	23.087

Tabelle 11.2: Bruchschwingspielzahlen des Perlenschnurversuchs
(Aluminiumschrauben M8x50 nach ISO 4017, EN AW 7075 T6, R = +0,5, n = 15, Paket A)

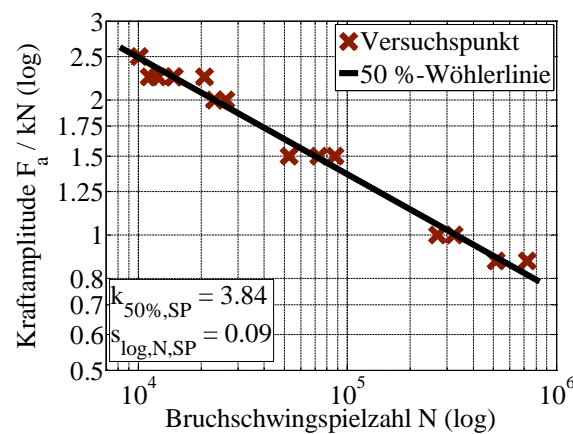
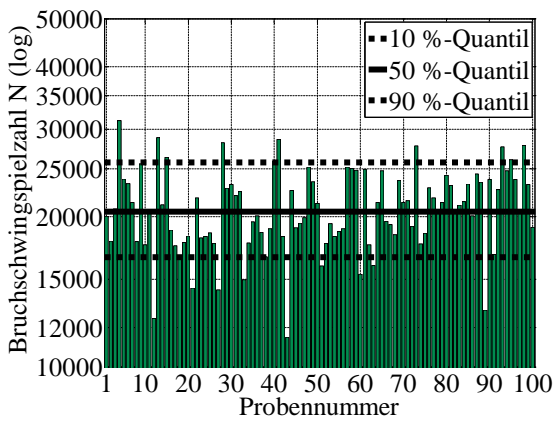


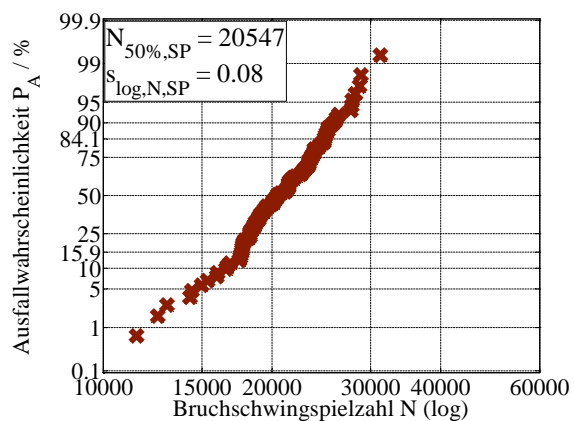
Abbildung 11.2: Zeitfestigkeitsgerade der Aluminiumschrauben
(Aluminiumschrauben M8x50 nach ISO 4017, EN AW 7075 T6, R = +0,5, n = 15, Paket A)

20.084	17.884	20.740	31.229	23.825
23.341	21.401	17.835	25.574	17.584
20.328	12.515	28.850	21.143	26.337
18.812	17.496	16.542	17.761	18.327
14.391	21.841	18.167	18.256	18.567
17.679	14.292	28.177	22.841	23.253
22.075	22.482	14.975	17.734	19.576
20.103	18.640	16.636	18.944	25.887
28.636	18.274	11.461	22.602	19.027
19.415	19.921	25.162	23.539	21.279
15.936	17.699	19.392	18.271	18.706
18.936	25.184	25.030	24.835	15.348
24.925	17.573	15.988	21.406	24.750
19.602	19.307	18.444	23.657	21.400
21.589	19.152	27.749	17.662	18.563
22.914	21.840	20.521	21.391	24.223
23.155	20.395	21.115	21.486	23.261
20.100	24.378	23.490	12.989	23.789
16.830	22.720	27.629	24.753	26.052
23.786	20.444	27.808	23.211	19.076

Tabelle 11.3: Bruchschwingspielzahlen für einen Horizontenversuch mit $F_a = 2,0$ kN (Aluminiumschrauben M8x50 nach ISO 4017, EN AW 7075 T6, R = +0,5, n = 100, Paket B)



(a) Lebensdauer über Probennummer

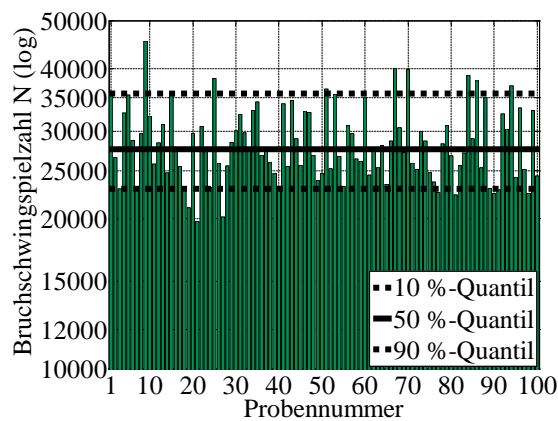


(b) Wahrscheinlichkeitspapier
log-Normalverteilung

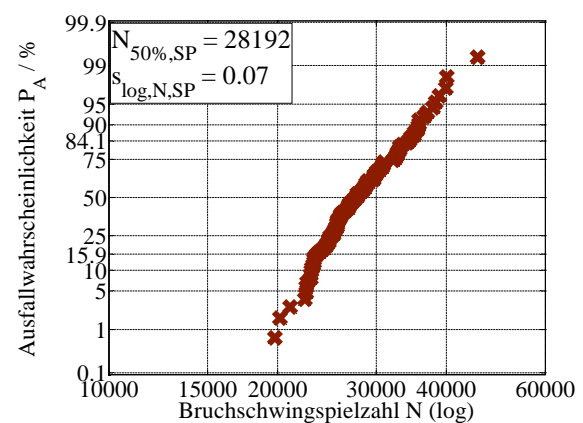
Abbildung 11.3: Bruchschwingspielzahlen für einen Horizontenversuch mit $F_a = 2,0$ kN (Aluminiumschrauben M8x50 nach ISO 4017, EN AW 7075 T6, R = +0,5, n = 100, Paket B)

35.769	26.580	22.989	32.638	35.496
28.750	23.233	29.642	45.507	32.194
25.777	28.462	30.980	24.789	35.763
27.751	25.530	23.283	21.049	29.749
19.772	30.710	27.487	23.147	38.302
25.916	20.191	25.548	28.519	30.035
32.414	29.769	27.763	33.046	34.390
26.849	27.389	25.977	24.687	22.904
34.040	25.517	34.567	28.984	25.644
32.918	32.724	26.864	23.941	24.667
36.500	25.228	35.594	26.723	23.244
30.815	29.640	26.370	26.101	35.048
24.482	27.735	25.362	28.076	23.497
28.674	40.097	30.514	27.170	39.891
25.890	25.131	30.000	28.698	24.833
23.733	22.584	28.305	30.847	26.767
22.370	25.608	27.134	38.831	28.966
37.846	25.376	35.079	23.012	22.505
22.911	32.533	30.320	37.006	24.229
33.410	25.147	22.485	33.000	24.393

Tabelle 11.4: Bruchschwingspielzahlen für einen Horizontenversuch mit $F_a = 2,0$ kN (Aluminiumschrauben M8x50 nach ISO 4017, EN AW 7075 T6, R = +0,5, n = 100, Paket C)



(a) Lebensdauer über Probennummer

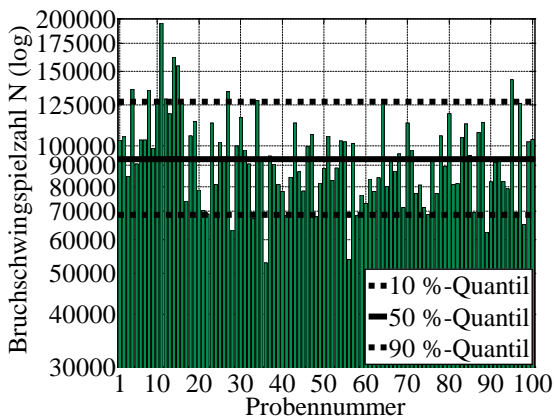


(b) Wahrscheinlichkeitspapier
log-Normalverteilung

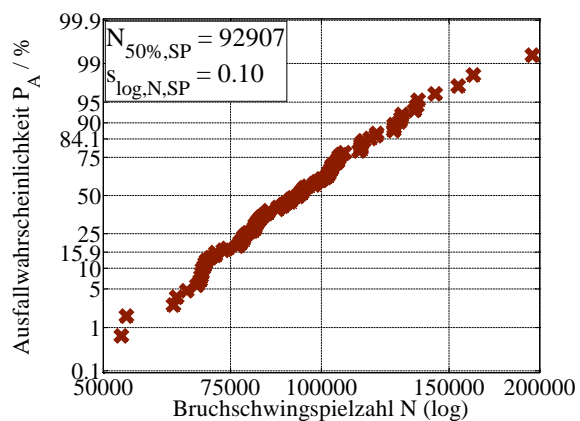
Abbildung 11.4: Bruchschwingspielzahlen für einen Horizontenversuch mit $F_a = 2,0$ kN (Aluminiumschrauben M8x50 nach ISO 4017, EN AW 7075 T6, R = +0,5, n = 100, Paket C)

103.187	105.282	84.680	136.008	90.595
103.313	103.427	135.411	98.754	126.104
195.455	129.151	119.119	162.058	154.573
126.019	74.132	105.710	114.339	78.693
70.344	69.104	113.410	81.105	101.962
94.176	134.356	63.192	100.116	116.787
97.864	90.779	67.312	128.168	93.902
52.939	94.634	90.530	81.110	78.030
68.466	84.386	113.410	86.954	78.192
99.894	106.482	68.198	81.664	88.389
105.306	82.840	88.665	102.744	102.359
53.859	101.351	68.528	76.561	73.210
83.430	77.965	84.178	128.795	80.232
93.981	87.162	95.813	71.563	113.439
97.745	77.294	80.862	71.412	68.919
92.867	77.275	105.801	89.319	119.110
80.933	81.536	104.705	112.755	94.813
69.498	107.521	113.687	62.517	82.186
91.450	93.032	82.466	79.179	143.611
68.052	125.819	65.170	102.346	103.536

Tabelle 11.5: Bruchschwingspielzahlen für einen Horizontenversuch mit $F_a = 1,375 \text{ kN}$ (Aluminiumschrauben M8x50 nach ISO 4017, EN AW 7075 T6, R = +0,5, n = 100, Paket D)



(a) Lebensdauer über Probennummer



(b) Wahrscheinlichkeitspapier
log-Normalverteilung

Abbildung 11.5: Bruchschwingspielzahlen für einen Horizontenversuch mit $F_a = 1,375 \text{ kN}$ (Aluminiumschrauben M8x50 nach ISO 4017, EN AW 7075 T6, R = +0,5, n = 100, Paket D)

11.2 Streuspannen des Perlenschnurverfahrens

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	6,86	2,57	2,03	1,78	1,65	1,58
	5	6,20	2,45	1,95	1,72	1,59	1,52
	6	5,67	2,33	1,88	1,66	1,54	1,48
	7	5,12	2,23	1,80	1,61	1,49	1,43
	8	4,95	2,13	1,74	1,58	1,46	1,41
	9	4,55	2,06	1,70	1,54	1,43	1,39
	10	4,45	2,01	1,66	1,52	1,41	1,37
	11	4,11	1,95	1,62	1,50	1,39	1,35
	12	3,96	1,91	1,61	1,47	1,37	1,33
	13	3,83	1,87	1,56	1,44	1,35	1,32
	14	3,67	1,83	1,55	1,44	1,34	1,31
	15	3,46	1,80	1,52	1,42	1,33	1,30
	16	3,45	1,77	1,52	1,41	1,33	1,29
	17	3,35	1,75	1,50	1,39	1,31	1,28
	18	3,28	1,73	1,48	1,38	1,30	1,27
	19	3,19	1,69	1,46	1,37	1,30	1,26
	20	3,14	1,67	1,46	1,35	1,29	1,26
	25	2,76	1,59	1,41	1,32	1,25	1,23
	30	2,60	1,53	1,36	1,29	1,23	1,21
	35	2,42	1,50	1,34	1,26	1,21	1,19
40	2,27	1,46	1,31	1,25	1,20	1,18	
45	2,19	1,42	1,29	1,23	1,19	1,17	
50	2,11	1,40	1,28	1,22	1,18	1,16	
60	1,98	1,36	1,25	1,19	1,16	1,14	
70	1,88	1,33	1,23	1,18	1,15	1,13	
80	1,81	1,30	1,21	1,17	1,14	1,13	
90	1,74	1,28	1,20	1,16	1,13	1,12	
100	1,70	1,27	1,19	1,15	1,12	1,11	

Tabelle 11.6: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 2 \cdot 10^4$ und $N = 5 \cdot 10^5$,
 $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0,10$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	1,38	1,39	1,40	1,39	1,39	1,39
	5	1,33	1,34	1,36	1,35	1,35	1,35
	6	1,30	1,31	1,31	1,31	1,31	1,32
	7	1,28	1,28	1,29	1,29	1,28	1,28
	8	1,26	1,27	1,27	1,26	1,27	1,27
	9	1,24	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
	10	1,23	1,23	1,23	1,24	1,24	1,24
	11	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22
	12	1,21	1,22	1,21	1,21	1,21	1,21
	13	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20
	14	1,19	1,20	1,20	1,19	1,19	1,20
	15	1,18	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19
	16	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18
	17	1,17	1,18	1,17	1,18	1,17	1,17
	18	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17
	19	1,16	1,17	1,17	1,17	1,17	1,16
	20	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16
	25	1,14	1,15	1,14	1,14	1,14	1,14
	30	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13
	35	1,12	1,12	1,12	1,12	1,12	1,12
40	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	
45	1,10	1,10	1,10	1,10	1,11	1,10	
50	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	
60	1,09	1,09	1,09	1,09	1,09	1,09	
70	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	
80	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	
90	1,07	1,07	1,07	1,07	1,07	1,07	
100	1,07	1,07	1,07	1,07	1,07	1,07	

Tabelle 11.7: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 1 \cdot 10^5$, $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,10$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	14,35	4,15	2,87	2,37	2,10	2,02
	5	12,10	3,63	2,66	2,22	1,98	1,87
	6	10,92	3,46	2,56	2,14	1,91	1,80
	7	10,42	3,22	2,38	2,05	1,82	1,75
	8	9,34	3,10	2,27	1,97	1,77	1,68
	9	8,74	2,93	2,20	1,90	1,69	1,63
	10	8,03	2,82	2,13	1,85	1,68	1,59
	11	7,56	2,68	2,08	1,80	1,64	1,56
	12	7,28	2,61	2,03	1,77	1,62	1,54
	13	6,52	2,53	1,97	1,75	1,58	1,52
	14	6,35	2,44	1,94	1,71	1,57	1,50
	15	6,04	2,40	1,89	1,68	1,53	1,49
	16	5,58	2,34	1,86	1,66	1,53	1,46
	17	5,63	2,30	1,85	1,64	1,50	1,45
	18	5,27	2,24	1,80	1,61	1,48	1,44
	19	5,07	2,20	1,78	1,60	1,46	1,42
	20	5,06	2,14	1,76	1,57	1,46	1,41
	25	4,42	1,99	1,66	1,51	1,40	1,36
	30	4,02	1,90	1,60	1,45	1,37	1,33
	35	3,65	1,81	1,54	1,42	1,33	1,29
40	3,42	1,76	1,49	1,39	1,32	1,27	
45	3,15	1,71	1,47	1,36	1,29	1,26	
50	3,02	1,65	1,44	1,34	1,28	1,25	
60	2,77	1,58	1,40	1,31	1,25	1,22	
70	2,59	1,53	1,36	1,29	1,23	1,21	
80	2,41	1,50	1,34	1,26	1,21	1,19	
90	2,32	1,45	1,32	1,25	1,20	1,18	
100	2,24	1,44	1,29	1,23	1,19	1,17	

Tabelle 11.8: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 2 \cdot 10^4$ und $N = 5 \cdot 10^5$,
 $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,15$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	1,59	1,63	1,64	1,64	1,65	1,66
	5	1,53	1,56	1,57	1,55	1,55	1,56
	6	1,48	1,49	1,51	1,50	1,51	1,51
	7	1,44	1,45	1,45	1,46	1,46	1,47
	8	1,41	1,41	1,42	1,42	1,43	1,42
	9	1,37	1,40	1,39	1,40	1,38	1,39
	10	1,36	1,37	1,38	1,37	1,37	1,37
	11	1,33	1,35	1,35	1,35	1,36	1,35
	12	1,32	1,34	1,33	1,34	1,34	1,34
	13	1,30	1,32	1,32	1,32	1,32	1,33
	14	1,29	1,31	1,31	1,31	1,31	1,31
	15	1,28	1,30	1,30	1,29	1,29	1,30
	16	1,28	1,28	1,28	1,29	1,28	1,28
	17	1,27	1,27	1,28	1,27	1,27	1,28
	18	1,26	1,27	1,26	1,26	1,27	1,27
	19	1,25	1,26	1,26	1,26	1,25	1,26
	20	1,24	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
	25	1,21	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22
	30	1,20	1,20	1,21	1,20	1,20	1,20
	35	1,18	1,19	1,18	1,19	1,19	1,18
40	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	
45	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	
50	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	
60	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14	
70	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13	
80	1,12	1,12	1,12	1,12	1,12	1,12	
90	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	
100	1,11	1,10	1,11	1,11	1,10	1,10	

Tabelle 11.9: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 1 \cdot 10^5$, $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0,15$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	28,43	6,02	4,02	3,14	2,71	2,50
	5	24,56	5,43	3,64	2,87	2,47	2,30
	6	19,99	4,84	3,38	2,73	2,33	2,19
	7	18,29	4,63	3,13	2,61	2,21	2,06
	8	15,81	4,25	3,01	2,48	2,13	1,98
	9	15,00	4,05	2,86	2,36	2,06	1,92
	10	13,67	3,82	2,75	2,29	1,99	1,87
	11	12,28	3,66	2,65	2,20	1,94	1,83
	12	11,99	3,49	2,56	2,13	1,89	1,79
	13	11,35	3,37	2,45	2,07	1,86	1,75
	14	10,12	3,20	2,36	2,04	1,81	1,70
	15	9,51	3,15	2,35	2,02	1,78	1,67
	16	8,92	3,01	2,31	1,94	1,74	1,66
	17	8,90	2,94	2,22	1,93	1,73	1,62
	18	8,26	2,91	2,19	1,88	1,70	1,61
	19	8,11	2,81	2,16	1,87	1,67	1,59
	20	7,65	2,73	2,11	1,83	1,66	1,58
	25	6,74	2,51	1,96	1,72	1,56	1,51
	30	5,91	2,36	1,87	1,66	1,52	1,45
	35	5,36	2,20	1,77	1,59	1,47	1,41
40	4,84	2,08	1,74	1,54	1,44	1,39	
45	4,51	2,01	1,68	1,51	1,40	1,36	
50	3,98	1,99	1,62	1,48	1,38	1,34	
60	3,72	1,85	1,55	1,44	1,34	1,31	
70	3,46	1,75	1,51	1,40	1,31	1,28	
80	3,19	1,70	1,46	1,37	1,29	1,26	
90	3,07	1,65	1,44	1,34	1,27	1,24	
100	2,85	1,61	1,42	1,32	1,26	1,24	

Tabelle 11.10: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 2 \cdot 10^4$ und $N = 5 \cdot 10^5$,
 $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,20$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	1,86	1,93	1,96	1,93	1,96	1,95
	5	1,74	1,78	1,81	1,81	1,81	1,80
	6	1,66	1,70	1,73	1,71	1,72	1,74
	7	1,62	1,64	1,64	1,65	1,66	1,65
	8	1,56	1,59	1,61	1,61	1,61	1,60
	9	1,51	1,54	1,56	1,55	1,57	1,56
	10	1,49	1,52	1,53	1,53	1,52	1,52
	11	1,46	1,50	1,49	1,50	1,50	1,50
	12	1,44	1,46	1,47	1,47	1,48	1,47
	13	1,42	1,44	1,45	1,44	1,45	1,44
	14	1,40	1,43	1,42	1,43	1,43	1,42
	15	1,39	1,41	1,41	1,42	1,41	1,40
	16	1,37	1,39	1,40	1,40	1,40	1,40
	17	1,37	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38
	18	1,35	1,38	1,36	1,37	1,37	1,37
	19	1,34	1,35	1,36	1,36	1,36	1,36
	20	1,33	1,34	1,35	1,35	1,35	1,35
	25	1,30	1,31	1,31	1,31	1,31	1,31
	30	1,27	1,28	1,28	1,27	1,28	1,27
	35	1,25	1,25	1,26	1,25	1,25	1,25
40	1,23	1,24	1,24	1,23	1,23	1,24	
45	1,21	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22	
50	1,20	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	
60	1,18	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	
70	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	
80	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	
90	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	
100	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14	1,15	

Tabelle 11.11: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 1 \cdot 10^5$, $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0,20$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	57,37	8,71	5,35	4,20	3,42	3,11
	5	48,22	7,85	4,89	3,79	3,14	2,82
	6	40,41	7,06	4,49	3,47	2,96	2,59
	7	34,00	6,34	4,14	3,20	2,70	2,51
	8	28,60	5,88	3,88	3,07	2,57	2,35
	9	25,52	5,46	3,60	2,91	2,44	2,30
	10	22,95	5,16	3,48	2,77	2,37	2,17
	11	20,01	4,84	3,37	2,67	2,27	2,10
	12	19,04	4,70	3,16	2,56	2,19	2,07
	13	17,61	4,40	3,01	2,46	2,14	2,00
	14	16,26	4,24	3,01	2,43	2,11	1,98
	15	15,30	4,04	2,83	2,37	2,05	1,91
	16	14,62	3,92	2,83	2,31	1,99	1,88
	17	13,64	3,86	2,72	2,24	1,97	1,87
	18	13,00	3,69	2,64	2,22	1,92	1,80
	19	12,61	3,56	2,61	2,18	1,90	1,81
	20	11,57	3,50	2,52	2,13	1,88	1,76
	25	9,63	3,11	2,34	1,97	1,76	1,66
	30	8,11	2,85	2,20	1,89	1,68	1,60
	35	7,58	2,69	2,03	1,79	1,62	1,55
40	6,92	2,53	1,97	1,72	1,57	1,51	
45	6,16	2,41	1,91	1,67	1,54	1,48	
50	5,70	2,32	1,84	1,63	1,50	1,44	
60	5,02	2,14	1,73	1,57	1,44	1,41	
70	4,50	2,03	1,67	1,52	1,41	1,36	
80	4,09	1,94	1,62	1,48	1,38	1,34	
90	3,82	1,87	1,58	1,43	1,36	1,31	
100	3,61	1,81	1,54	1,42	1,34	1,30	

Tabelle 11.12: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 2 \cdot 10^4$ und $N = 5 \cdot 10^5$,
 $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,25$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	2,16	2,23	2,26	2,26	2,28	2,29
	5	1,99	2,06	2,09	2,07	2,12	2,10
	6	1,87	1,93	1,94	1,95	1,99	1,96
	7	1,79	1,84	1,87	1,85	1,88	1,88
	8	1,74	1,77	1,79	1,80	1,81	1,79
	9	1,67	1,72	1,73	1,74	1,73	1,74
	10	1,63	1,66	1,69	1,70	1,70	1,69
	11	1,60	1,64	1,65	1,64	1,65	1,65
	12	1,58	1,61	1,60	1,62	1,62	1,63
	13	1,54	1,57	1,58	1,58	1,59	1,60
	14	1,52	1,55	1,55	1,56	1,57	1,56
	15	1,50	1,52	1,53	1,53	1,54	1,54
	16	1,48	1,51	1,51	1,52	1,52	1,52
	17	1,46	1,48	1,50	1,49	1,50	1,51
	18	1,44	1,47	1,48	1,48	1,48	1,48
	19	1,43	1,45	1,47	1,46	1,47	1,47
	20	1,42	1,44	1,44	1,46	1,46	1,45
	25	1,37	1,39	1,40	1,39	1,40	1,39
	30	1,34	1,35	1,36	1,36	1,36	1,36
	35	1,31	1,33	1,32	1,32	1,33	1,33
40	1,28	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	
45	1,27	1,28	1,28	1,28	1,29	1,29	
50	1,26	1,27	1,26	1,27	1,27	1,27	
60	1,23	1,24	1,24	1,24	1,24	1,24	
70	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22	
80	1,20	1,21	1,20	1,20	1,21	1,20	
90	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	
100	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	

Tabelle 11.13: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 1 \cdot 10^5$, $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0,25$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	132,14	11,77	7,43	5,36	4,35	3,88
	5	92,33	10,87	6,47	4,89	3,88	3,55
	6	67,49	9,50	5,89	4,43	3,56	3,22
	7	59,91	8,32	5,21	4,03	3,30	3,03
	8	48,52	7,86	4,87	3,76	3,12	2,79
	9	42,36	7,17	4,58	3,53	2,87	2,67
	10	39,92	6,68	4,37	3,35	2,78	2,55
	11	33,01	6,24	4,14	3,28	2,67	2,41
	12	31,23	6,18	3,95	3,08	2,59	2,37
	13	27,22	5,58	3,70	3,01	2,51	2,28
	14	26,19	5,28	3,59	2,83	2,40	2,22
	15	23,56	5,29	3,47	2,76	2,37	2,20
	16	22,23	4,97	3,48	2,79	2,28	2,13
	17	21,10	4,86	3,29	2,64	2,24	2,06
	18	19,40	4,60	3,14	2,57	2,17	2,05
	19	18,36	4,52	3,02	2,51	2,15	2,01
	20	16,89	4,35	3,01	2,46	2,12	1,99
	25	13,83	3,87	2,72	2,25	1,98	1,84
	30	11,32	3,45	2,52	2,12	1,88	1,78
	35	10,05	3,19	2,39	2,01	1,78	1,69
40	8,94	3,00	2,22	1,92	1,73	1,62	
45	8,28	2,84	2,17	1,87	1,67	1,58	
50	7,41	2,66	2,10	1,81	1,63	1,55	
60	6,62	2,45	1,93	1,71	1,56	1,50	
70	5,79	2,34	1,86	1,65	1,51	1,46	
80	5,35	2,19	1,78	1,60	1,47	1,41	
90	4,99	2,12	1,73	1,56	1,45	1,38	
100	4,49	2,05	1,67	1,53	1,41	1,37	

Tabelle 11.14: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 2 \cdot 10^4$ und $N = 5 \cdot 10^5$,
 $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,30$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	2,50	2,62	2,65	2,66	2,71	2,70
	5	2,27	2,35	2,38	2,40	2,43	2,46
	6	2,12	2,18	2,22	2,24	2,26	2,25
	7	1,98	2,06	2,07	2,13	2,14	2,15
	8	1,94	1,98	2,00	1,99	2,02	2,00
	9	1,85	1,90	1,95	1,93	1,93	1,97
	10	1,80	1,84	1,86	1,88	1,86	1,87
	11	1,76	1,79	1,79	1,83	1,83	1,81
	12	1,72	1,75	1,75	1,77	1,78	1,78
	13	1,67	1,72	1,73	1,74	1,74	1,74
	14	1,65	1,68	1,69	1,69	1,70	1,71
	15	1,61	1,66	1,66	1,68	1,67	1,69
	16	1,59	1,63	1,63	1,65	1,65	1,65
	17	1,57	1,62	1,63	1,61	1,62	1,62
	18	1,55	1,59	1,60	1,60	1,60	1,61
	19	1,52	1,56	1,56	1,59	1,59	1,58
	20	1,51	1,55	1,56	1,56	1,56	1,57
	25	1,46	1,48	1,49	1,49	1,50	1,49
	30	1,42	1,43	1,44	1,44	1,44	1,44
	35	1,38	1,40	1,41	1,41	1,40	1,40
40	1,35	1,38	1,37	1,37	1,38	1,37	
45	1,33	1,34	1,35	1,35	1,35	1,35	
50	1,31	1,33	1,33	1,33	1,32	1,33	
60	1,29	1,30	1,30	1,30	1,29	1,29	
70	1,26	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	
80	1,24	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	
90	1,23	1,23	1,24	1,23	1,23	1,24	
100	1,21	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22	

Tabelle 11.15: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 1 \cdot 10^5$, $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0,30$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	3,43	1,76	1,48	1,35	1,26	1,22
	5	3,21	1,71	1,45	1,32	1,25	1,20
	6	3,03	1,65	1,42	1,31	1,23	1,19
	7	2,85	1,61	1,40	1,29	1,22	1,18
	8	2,76	1,58	1,37	1,27	1,20	1,17
	9	2,65	1,54	1,35	1,26	1,19	1,16
	10	2,61	1,52	1,34	1,25	1,19	1,16
	11	2,47	1,49	1,32	1,24	1,18	1,15
	12	2,44	1,47	1,31	1,23	1,17	1,14
	13	2,37	1,45	1,30	1,21	1,16	1,14
	14	2,28	1,43	1,29	1,21	1,16	1,14
	15	2,22	1,42	1,27	1,21	1,15	1,13
	16	2,21	1,41	1,27	1,20	1,15	1,13
	17	2,15	1,40	1,26	1,20	1,15	1,12
	18	2,12	1,38	1,25	1,19	1,14	1,12
	19	2,09	1,37	1,25	1,18	1,14	1,12
	20	2,09	1,36	1,24	1,18	1,13	1,11
	25	1,91	1,32	1,21	1,16	1,12	1,10
	30	1,82	1,29	1,20	1,15	1,11	1,09
	35	1,75	1,27	1,18	1,13	1,10	1,09
40	1,67	1,26	1,17	1,13	1,09	1,08	
45	1,63	1,23	1,16	1,12	1,09	1,08	
50	1,59	1,22	1,15	1,11	1,08	1,07	
60	1,53	1,20	1,14	1,10	1,08	1,07	
70	1,49	1,19	1,13	1,09	1,07	1,06	
80	1,45	1,17	1,12	1,09	1,07	1,06	
90	1,41	1,16	1,11	1,08	1,06	1,05	
100	1,38	1,15	1,11	1,08	1,06	1,05	

Tabelle 11.16: Streuspannen der Neigungsschätzung, $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,10$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	5,08	2,37	1,82	1,57	1,41	1,35
	5	4,69	2,18	1,75	1,52	1,38	1,32
	6	4,55	2,10	1,71	1,50	1,36	1,30
	7	4,35	2,04	1,65	1,46	1,33	1,28
	8	4,10	1,98	1,59	1,43	1,33	1,26
	9	3,91	1,94	1,57	1,42	1,30	1,25
	10	3,74	1,86	1,54	1,40	1,29	1,24
	11	3,61	1,82	1,52	1,37	1,27	1,23
	12	3,55	1,78	1,51	1,36	1,27	1,22
	13	3,37	1,75	1,48	1,35	1,26	1,21
	14	3,28	1,71	1,46	1,34	1,25	1,21
	15	3,16	1,69	1,44	1,33	1,24	1,20
	16	3,02	1,67	1,43	1,31	1,23	1,20
	17	3,03	1,63	1,42	1,31	1,23	1,19
	18	2,91	1,63	1,41	1,29	1,22	1,18
	19	2,87	1,61	1,39	1,29	1,21	1,18
	20	2,80	1,59	1,38	1,28	1,21	1,17
	25	2,58	1,51	1,34	1,25	1,18	1,15
	30	2,44	1,47	1,31	1,23	1,17	1,14
	35	2,30	1,43	1,28	1,21	1,16	1,13
40	2,18	1,40	1,26	1,20	1,15	1,12	
45	2,06	1,38	1,25	1,18	1,14	1,11	
50	2,02	1,35	1,23	1,17	1,13	1,11	
60	1,91	1,32	1,21	1,16	1,12	1,10	
70	1,83	1,29	1,19	1,15	1,11	1,09	
80	1,74	1,27	1,18	1,14	1,10	1,09	
90	1,70	1,25	1,17	1,13	1,10	1,08	
100	1,66	1,24	1,16	1,12	1,09	1,08	

Tabelle 11.17: Streuspannen der Neigungsschätzung, $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0,15$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	6,66	2,96	2,21	1,83	1,59	1,48
	5	6,38	2,79	2,10	1,76	1,56	1,45
	6	5,90	2,63	2,01	1,71	1,51	1,43
	7	5,65	2,56	1,94	1,67	1,47	1,38
	8	5,43	2,45	1,89	1,63	1,45	1,36
	9	5,21	2,38	1,83	1,59	1,43	1,35
	10	5,02	2,27	1,79	1,56	1,41	1,33
	11	4,74	2,20	1,75	1,54	1,39	1,33
	12	4,60	2,14	1,72	1,50	1,37	1,31
	13	4,46	2,10	1,68	1,49	1,36	1,29
	14	4,22	2,05	1,65	1,48	1,35	1,28
	15	4,26	2,02	1,64	1,46	1,33	1,27
	16	4,02	1,96	1,63	1,44	1,32	1,27
	17	3,96	1,94	1,58	1,43	1,31	1,26
	18	3,83	1,92	1,58	1,42	1,31	1,25
	19	3,77	1,86	1,56	1,41	1,30	1,24
	20	3,68	1,84	1,54	1,40	1,29	1,24
	25	3,33	1,74	1,48	1,34	1,26	1,21
	30	3,13	1,68	1,43	1,31	1,24	1,19
	35	2,97	1,62	1,39	1,30	1,21	1,18
40	2,78	1,56	1,37	1,27	1,20	1,17	
45	2,61	1,53	1,35	1,25	1,19	1,16	
50	2,42	1,52	1,32	1,24	1,18	1,15	
60	2,30	1,45	1,29	1,22	1,16	1,14	
70	2,22	1,40	1,27	1,20	1,15	1,13	
80	2,10	1,38	1,25	1,19	1,14	1,12	
90	2,04	1,35	1,23	1,17	1,13	1,11	
100	1,95	1,33	1,22	1,16	1,12	1,10	

Tabelle 11.18: Streuspannen der Neigungsschätzung, $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,20$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	8,06	3,68	2,61	2,11	1,78	1,64
	5	7,65	3,49	2,50	2,04	1,73	1,58
	6	7,13	3,26	2,41	1,97	1,68	1,55
	7	6,85	3,14	2,29	1,90	1,63	1,52
	8	6,62	2,97	2,21	1,83	1,60	1,48
	9	6,46	2,86	2,11	1,78	1,56	1,47
	10	6,16	2,74	2,07	1,77	1,54	1,44
	11	5,87	2,68	2,04	1,72	1,50	1,41
	12	5,74	2,59	1,97	1,68	1,48	1,40
	13	5,72	2,48	1,88	1,63	1,46	1,38
	14	5,37	2,43	1,89	1,62	1,45	1,38
	15	5,22	2,39	1,84	1,61	1,43	1,35
	16	5,19	2,34	1,83	1,58	1,42	1,35
	17	4,90	2,30	1,80	1,55	1,40	1,34
	18	4,83	2,23	1,78	1,56	1,39	1,32
	19	4,80	2,21	1,74	1,53	1,39	1,32
	20	4,51	2,16	1,71	1,51	1,38	1,31
	25	4,22	2,00	1,64	1,45	1,33	1,27
	30	3,83	1,89	1,57	1,42	1,29	1,25
	35	3,65	1,84	1,51	1,37	1,27	1,23
40	3,50	1,76	1,48	1,34	1,26	1,21	
45	3,22	1,71	1,45	1,32	1,24	1,20	
50	3,02	1,67	1,42	1,30	1,23	1,19	
60	2,81	1,58	1,38	1,28	1,20	1,17	
70	2,60	1,53	1,34	1,26	1,19	1,16	
80	2,47	1,49	1,32	1,24	1,18	1,15	
90	2,36	1,46	1,30	1,22	1,17	1,14	
100	2,27	1,43	1,28	1,21	1,16	1,13	

Tabelle 11.19: Streuspannen der Neigungsschätzung, $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0,25$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	9,25	4,31	3,13	2,46	2,01	1,81
	5	8,65	4,13	2,92	2,33	1,95	1,74
	6	8,30	3,92	2,79	2,24	1,88	1,70
	7	8,42	3,62	2,64	2,13	1,78	1,65
	8	8,00	3,56	2,50	2,07	1,76	1,61
	9	7,40	3,44	2,41	2,00	1,70	1,57
	10	7,31	3,23	2,40	1,95	1,68	1,53
	11	6,87	3,10	2,29	1,92	1,63	1,52
	12	6,69	3,06	2,25	1,86	1,62	1,49
	13	6,47	2,91	2,18	1,82	1,59	1,48
	14	6,60	2,85	2,11	1,77	1,55	1,46
	15	6,23	2,80	2,10	1,75	1,55	1,44
	16	6,01	2,75	2,06	1,75	1,52	1,42
	17	5,78	2,66	2,00	1,71	1,50	1,42
	18	5,77	2,56	1,98	1,70	1,48	1,40
	19	5,63	2,52	1,92	1,67	1,48	1,39
	20	5,47	2,46	1,91	1,65	1,46	1,38
	25	5,07	2,32	1,80	1,56	1,40	1,33
	30	4,61	2,14	1,72	1,51	1,37	1,32
	35	4,21	2,05	1,67	1,47	1,35	1,28
40	4,03	1,96	1,59	1,44	1,32	1,26	
45	3,88	1,89	1,56	1,40	1,30	1,25	
50	3,66	1,82	1,53	1,38	1,28	1,23	
60	3,39	1,72	1,47	1,35	1,25	1,21	
70	3,07	1,68	1,43	1,32	1,23	1,19	
80	2,93	1,61	1,39	1,29	1,22	1,18	
90	2,81	1,58	1,37	1,27	1,21	1,17	
100	2,62	1,55	1,35	1,26	1,19	1,16	

Tabelle 11.20: Streuspannen der Neigungsschätzung, $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,30$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	4,69	4,60	4,75	4,70	4,66	4,64
	5	3,34	3,28	3,27	3,31	3,26	3,31
	6	2,71	2,69	2,70	2,70	2,70	2,71
	7	2,36	2,36	2,37	2,41	2,38	2,38
	8	2,19	2,19	2,21	2,19	2,20	2,21
	9	2,06	2,05	2,07	2,05	2,06	2,07
	10	1,95	1,95	1,97	1,97	1,95	1,95
	11	1,87	1,88	1,87	1,88	1,87	1,87
	12	1,81	1,80	1,82	1,81	1,81	1,81
	13	1,76	1,75	1,76	1,76	1,76	1,76
	14	1,71	1,71	1,72	1,71	1,71	1,71
	15	1,68	1,67	1,68	1,68	1,68	1,67
	16	1,65	1,65	1,65	1,65	1,64	1,65
	17	1,62	1,61	1,62	1,62	1,62	1,62
	18	1,58	1,59	1,59	1,59	1,60	1,59
	19	1,57	1,57	1,57	1,56	1,56	1,57
	20	1,54	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55
	25	1,47	1,47	1,47	1,47	1,47	1,47
	30	1,42	1,41	1,41	1,41	1,42	1,41
	35	1,38	1,37	1,37	1,38	1,37	1,38
40	1,35	1,35	1,34	1,34	1,35	1,35	
45	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	
50	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	
60	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	
70	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	
80	1,23	1,23	1,23	1,23	1,23	1,23	
90	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	
100	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	

Tabelle 11.21: Streuspannen der Standardabweichungsschätzung

11.3 Streuspannen des Horizontenverfahrens

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	4,09	1,94	1,64	1,55	1,47	1,43
	5	3,39	1,73	1,52	1,42	1,37	1,34
	6	3,16	1,72	1,50	1,42	1,37	1,34
	7	2,83	1,61	1,43	1,35	1,31	1,29
	8	2,70	1,59	1,43	1,36	1,31	1,29
	9	2,53	1,53	1,38	1,31	1,27	1,26
	10	2,42	1,51	1,38	1,32	1,28	1,26
	11	2,29	1,47	1,34	1,28	1,25	1,23
	12	2,25	1,47	1,34	1,28	1,25	1,23
	13	2,14	1,43	1,31	1,26	1,23	1,21
	14	2,14	1,42	1,31	1,26	1,23	1,21
	15	2,05	1,39	1,29	1,25	1,21	1,20
	16	2,03	1,39	1,29	1,24	1,21	1,20
	17	1,96	1,37	1,27	1,23	1,20	1,19
	18	1,94	1,37	1,27	1,23	1,20	1,18
	19	1,90	1,35	1,26	1,21	1,19	1,18
	20	1,87	1,34	1,26	1,22	1,19	1,17
	25	1,75	1,30	1,22	1,19	1,16	1,15
	30	1,66	1,27	1,20	1,17	1,15	1,14
	35	1,60	1,25	1,18	1,16	1,14	1,13
40	1,55	1,23	1,17	1,15	1,13	1,12	
45	1,51	1,21	1,16	1,14	1,12	1,11	
50	1,48	1,21	1,15	1,13	1,11	1,11	
60	1,44	1,19	1,14	1,12	1,10	1,10	
70	1,40	1,17	1,13	1,11	1,10	1,09	
80	1,36	1,16	1,12	1,10	1,09	1,08	
90	1,35	1,15	1,11	1,10	1,08	1,08	
100	1,32	1,14	1,11	1,09	1,08	1,08	

Tabelle 11.22: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 2 \cdot 10^4$ und $N = 5 \cdot 10^5$,
 $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0,10$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	1,34	1,35	1,34	1,35	1,34	1,34
	5	1,31	1,31	1,31	1,30	1,31	1,31
	6	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27
	7	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
	8	1,23	1,23	1,23	1,23	1,23	1,23
	9	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22
	10	1,21	1,20	1,20	1,21	1,21	1,21
	11	1,19	1,20	1,19	1,20	1,20	1,20
	12	1,18	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19
	13	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18
	14	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17
	15	1,16	1,17	1,17	1,16	1,16	1,16
	16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16
	17	1,16	1,16	1,15	1,15	1,15	1,15
	18	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15
	19	1,15	1,14	1,15	1,15	1,14	1,15
	20	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14
	25	1,12	1,13	1,13	1,13	1,12	1,12
	30	1,12	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
	35	1,11	1,11	1,10	1,10	1,10	1,11
40	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	
45	1,09	1,09	1,09	1,09	1,09	1,09	
50	1,09	1,09	1,09	1,09	1,09	1,09	
60	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	
70	1,07	1,07	1,07	1,07	1,07	1,07	
80	1,07	1,07	1,07	1,07	1,07	1,07	
90	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	
100	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	

Tabelle 11.23: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 1 \cdot 10^5$, $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0,10$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	7,52	2,72	2,13	1,90	1,78	1,71
	5	6,15	2,29	1,87	1,70	1,61	1,56
	6	5,53	2,23	1,85	1,70	1,59	1,56
	7	4,74	2,04	1,72	1,58	1,50	1,47
	8	4,40	2,02	1,71	1,58	1,51	1,46
	9	3,97	1,87	1,62	1,50	1,44	1,41
	10	3,75	1,86	1,62	1,51	1,44	1,41
	11	3,48	1,78	1,55	1,45	1,39	1,37
	12	3,36	1,76	1,55	1,45	1,39	1,36
	13	3,17	1,71	1,51	1,42	1,36	1,34
	14	3,07	1,69	1,50	1,41	1,36	1,33
	15	2,91	1,64	1,47	1,38	1,33	1,31
	16	2,87	1,64	1,47	1,38	1,33	1,31
	17	2,76	1,60	1,43	1,36	1,31	1,29
	18	2,67	1,59	1,43	1,36	1,31	1,29
	19	2,62	1,56	1,41	1,34	1,29	1,27
	20	2,59	1,56	1,40	1,34	1,29	1,27
	25	2,29	1,48	1,35	1,29	1,25	1,24
	30	2,15	1,44	1,32	1,27	1,23	1,22
	35	2,02	1,39	1,29	1,24	1,21	1,20
40	1,93	1,36	1,28	1,23	1,20	1,18	
45	1,87	1,34	1,25	1,21	1,19	1,17	
50	1,81	1,32	1,24	1,20	1,18	1,17	
60	1,73	1,29	1,22	1,18	1,16	1,15	
70	1,64	1,27	1,20	1,17	1,15	1,14	
80	1,60	1,25	1,18	1,16	1,14	1,13	
90	1,56	1,23	1,17	1,15	1,13	1,12	
100	1,52	1,22	1,16	1,14	1,12	1,11	

Tabelle 11.24: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 2 \cdot 10^4$ und $N = 5 \cdot 10^5$,
 $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,15$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	1,56	1,56	1,56	1,55	1,56	1,56
	5	1,50	1,49	1,50	1,50	1,50	1,49
	6	1,44	1,43	1,44	1,43	1,44	1,43
	7	1,40	1,41	1,40	1,40	1,40	1,40
	8	1,37	1,37	1,37	1,36	1,37	1,37
	9	1,35	1,34	1,35	1,34	1,35	1,35
	10	1,32	1,32	1,33	1,32	1,32	1,32
	11	1,31	1,30	1,31	1,30	1,30	1,31
	12	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29
	13	1,28	1,28	1,28	1,28	1,28	1,28
	14	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27
	15	1,26	1,26	1,26	1,25	1,26	1,26
	16	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
	17	1,24	1,24	1,24	1,24	1,24	1,24
	18	1,23	1,23	1,23	1,23	1,23	1,23
	19	1,22	1,22	1,23	1,22	1,23	1,23
	20	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22
	25	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19
	30	1,17	1,18	1,17	1,18	1,17	1,18
	35	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16
40	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	
45	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14	
50	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13	
60	1,12	1,12	1,12	1,12	1,12	1,12	
70	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11	
80	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	
90	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	
100	1,09	1,09	1,09	1,09	1,09	1,09	

Tabelle 11.25: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 1 \cdot 10^5$, $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0,15$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	12,48	3,76	2,78	2,39	2,14	2,05
	5	9,57	3,04	2,31	2,03	1,86	1,81
	6	8,63	2,96	2,29	2,04	1,86	1,80
	7	7,45	2,59	2,06	1,84	1,72	1,67
	8	6,83	2,54	2,05	1,85	1,72	1,67
	9	6,08	2,32	1,90	1,73	1,62	1,58
	10	5,74	2,33	1,91	1,74	1,62	1,58
	11	5,15	2,14	1,79	1,66	1,56	1,52
	12	4,96	2,15	1,80	1,65	1,55	1,52
	13	4,61	2,04	1,71	1,59	1,50	1,47
	14	4,45	2,03	1,72	1,59	1,50	1,47
	15	4,24	1,94	1,65	1,55	1,46	1,43
	16	4,02	1,94	1,66	1,54	1,45	1,44
	17	3,79	1,87	1,62	1,51	1,44	1,41
	18	3,68	1,86	1,61	1,50	1,43	1,40
	19	3,60	1,81	1,58	1,47	1,41	1,38
	20	3,46	1,81	1,57	1,47	1,41	1,38
	25	3,03	1,68	1,49	1,41	1,35	1,33
	30	2,76	1,62	1,45	1,37	1,32	1,30
	35	2,56	1,55	1,40	1,33	1,29	1,27
40	2,41	1,52	1,38	1,32	1,27	1,26	
45	2,30	1,47	1,35	1,29	1,25	1,23	
50	2,20	1,46	1,33	1,28	1,24	1,23	
60	2,06	1,41	1,30	1,25	1,22	1,20	
70	1,96	1,37	1,28	1,23	1,20	1,19	
80	1,86	1,35	1,25	1,21	1,19	1,18	
90	1,80	1,32	1,24	1,20	1,18	1,16	
100	1,74	1,30	1,22	1,19	1,17	1,15	

Tabelle 11.26: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 2 \cdot 10^4$ und $N = 5 \cdot 10^5$,
 $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,20$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	1,81	1,80	1,82	1,81	1,80	1,82
	5	1,70	1,71	1,71	1,72	1,70	1,72
	6	1,62	1,63	1,62	1,62	1,62	1,61
	7	1,57	1,57	1,57	1,57	1,57	1,57
	8	1,52	1,52	1,51	1,52	1,51	1,52
	9	1,49	1,49	1,49	1,48	1,48	1,49
	10	1,45	1,45	1,45	1,45	1,45	1,46
	11	1,43	1,43	1,43	1,43	1,43	1,43
	12	1,41	1,40	1,40	1,41	1,41	1,41
	13	1,38	1,39	1,38	1,39	1,38	1,39
	14	1,37	1,37	1,37	1,37	1,37	1,37
	15	1,35	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36
	16	1,34	1,34	1,34	1,34	1,34	1,34
	17	1,34	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33
	18	1,33	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32
	19	1,31	1,31	1,31	1,31	1,31	1,31
	20	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30
	25	1,26	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27
	30	1,24	1,24	1,24	1,24	1,24	1,24
	35	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22
40	1,20	1,20	1,21	1,21	1,21	1,21	
45	1,19	1,19	1,19	1,19	1,20	1,19	
50	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	
60	1,17	1,16	1,17	1,17	1,17	1,17	
70	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	
80	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14	
90	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13	
100	1,12	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13	

Tabelle 11.27: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 1 \cdot 10^5$, $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0,20$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	19,72	5,14	3,57	2,92	2,61	2,47
	5	14,68	3,99	2,83	2,41	2,19	2,11
	6	13,28	3,78	2,79	2,44	2,19	2,09
	7	10,32	3,25	2,47	2,15	1,97	1,91
	8	10,10	3,23	2,45	2,14	1,97	1,90
	9	8,57	2,88	2,24	1,99	1,83	1,77
	10	8,26	2,83	2,22	1,97	1,83	1,77
	11	7,50	2,63	2,10	1,85	1,73	1,68
	12	7,15	2,60	2,08	1,86	1,73	1,68
	13	6,51	2,42	1,97	1,78	1,66	1,62
	14	6,18	2,42	1,95	1,77	1,67	1,62
	15	5,77	2,29	1,89	1,72	1,61	1,56
	16	5,65	2,26	1,88	1,70	1,62	1,57
	17	5,20	2,19	1,81	1,67	1,57	1,52
	18	5,13	2,18	1,81	1,66	1,57	1,53
	19	4,92	2,09	1,77	1,63	1,54	1,49
	20	4,71	2,07	1,76	1,63	1,53	1,49
	25	4,03	1,91	1,64	1,53	1,46	1,43
	30	3,60	1,83	1,59	1,49	1,42	1,39
	35	3,24	1,73	1,53	1,44	1,37	1,35
40	3,05	1,68	1,49	1,40	1,35	1,33	
45	2,86	1,63	1,45	1,37	1,33	1,30	
50	2,69	1,59	1,43	1,36	1,31	1,29	
60	2,45	1,54	1,38	1,32	1,28	1,26	
70	2,30	1,48	1,35	1,29	1,26	1,24	
80	2,18	1,45	1,33	1,27	1,24	1,22	
90	2,06	1,42	1,31	1,26	1,22	1,21	
100	2,00	1,39	1,29	1,24	1,21	1,20	

Tabelle 11.28: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 2 \cdot 10^4$ und $N = 5 \cdot 10^5$,
 $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,25$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	2,10	2,08	2,09	2,08	2,10	2,10
	5	1,94	1,96	1,97	1,96	1,97	1,98
	6	1,83	1,81	1,82	1,83	1,83	1,84
	7	1,75	1,76	1,75	1,76	1,76	1,77
	8	1,68	1,68	1,68	1,69	1,69	1,69
	9	1,63	1,64	1,64	1,64	1,64	1,64
	10	1,59	1,60	1,59	1,59	1,60	1,59
	11	1,56	1,57	1,56	1,56	1,56	1,57
	12	1,53	1,53	1,52	1,53	1,53	1,53
	13	1,51	1,51	1,50	1,51	1,51	1,50
	14	1,48	1,48	1,48	1,48	1,48	1,48
	15	1,47	1,47	1,46	1,47	1,47	1,46
	16	1,45	1,45	1,45	1,44	1,45	1,45
	17	1,42	1,43	1,43	1,43	1,43	1,43
	18	1,42	1,42	1,41	1,42	1,41	1,42
	19	1,40	1,40	1,40	1,40	1,41	1,40
	20	1,39	1,38	1,39	1,39	1,39	1,38
	25	1,34	1,34	1,35	1,35	1,35	1,34
	30	1,31	1,31	1,31	1,31	1,31	1,31
	35	1,28	1,28	1,28	1,28	1,28	1,28
40	1,27	1,27	1,26	1,26	1,26	1,26	
45	1,25	1,24	1,24	1,25	1,25	1,25	
50	1,23	1,23	1,23	1,23	1,23	1,23	
60	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	
70	1,20	1,20	1,19	1,19	1,19	1,19	
80	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	
90	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	
100	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	

Tabelle 11.29: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 1 \cdot 10^5$, $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0,25$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	29,91	7,05	4,59	3,68	3,18	2,95
	5	21,60	5,07	3,50	2,88	2,54	2,42
	6	18,27	5,05	3,41	2,92	2,54	2,40
	7	15,37	4,16	2,92	2,50	2,25	2,17
	8	14,31	4,05	2,94	2,49	2,25	2,15
	9	12,08	3,53	2,61	2,28	2,08	1,98
	10	11,41	3,54	2,62	2,28	2,06	1,99
	11	10,05	3,16	2,42	2,14	1,94	1,87
	12	9,59	3,09	2,40	2,11	1,94	1,86
	13	8,73	2,91	2,26	1,99	1,83	1,78
	14	8,33	2,86	2,27	2,00	1,85	1,78
	15	7,91	2,73	2,16	1,92	1,77	1,72
	16	7,57	2,70	2,15	1,91	1,77	1,71
	17	7,21	2,55	2,05	1,84	1,72	1,66
	18	7,00	2,55	2,03	1,85	1,71	1,66
	19	6,55	2,46	1,97	1,78	1,67	1,61
	20	6,24	2,42	1,97	1,78	1,68	1,62
	25	5,21	2,17	1,83	1,67	1,56	1,53
	30	4,63	2,04	1,74	1,61	1,52	1,48
	35	4,10	1,94	1,66	1,56	1,47	1,43
40	3,77	1,87	1,62	1,51	1,44	1,40	
45	3,51	1,79	1,56	1,47	1,40	1,37	
50	3,28	1,75	1,54	1,45	1,38	1,36	
60	2,89	1,67	1,48	1,40	1,34	1,32	
70	2,74	1,61	1,43	1,36	1,31	1,29	
80	2,56	1,56	1,41	1,34	1,29	1,27	
90	2,42	1,52	1,38	1,31	1,27	1,26	
100	2,34	1,49	1,36	1,30	1,26	1,24	

Tabelle 11.30: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 2 \cdot 10^4$ und $N = 5 \cdot 10^5$,
 $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,30$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	2,41	2,44	2,41	2,42	2,43	2,44
	5	2,23	2,24	2,24	2,26	2,25	2,25
	6	2,06	2,07	2,07	2,06	2,05	2,06
	7	1,97	1,97	1,97	1,96	1,97	1,99
	8	1,88	1,87	1,87	1,87	1,88	1,87
	9	1,80	1,81	1,81	1,82	1,81	1,80
	10	1,76	1,75	1,75	1,74	1,75	1,76
	11	1,70	1,71	1,71	1,72	1,71	1,71
	12	1,67	1,67	1,66	1,66	1,67	1,67
	13	1,63	1,64	1,63	1,64	1,63	1,64
	14	1,60	1,61	1,60	1,61	1,60	1,61
	15	1,58	1,58	1,58	1,58	1,57	1,59
	16	1,55	1,55	1,55	1,56	1,55	1,56
	17	1,53	1,55	1,54	1,53	1,54	1,54
	18	1,52	1,52	1,52	1,52	1,51	1,52
	19	1,49	1,50	1,51	1,50	1,49	1,50
	20	1,49	1,49	1,48	1,49	1,49	1,48
	25	1,43	1,42	1,43	1,42	1,42	1,43
	30	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38
	35	1,35	1,35	1,35	1,36	1,35	1,35
40	1,32	1,32	1,33	1,32	1,32	1,32	
45	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	
50	1,28	1,29	1,28	1,28	1,29	1,29	
60	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	
70	1,24	1,24	1,24	1,23	1,24	1,24	
80	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22	1,22	
90	1,21	1,20	1,20	1,21	1,21	1,21	
100	1,19	1,20	1,19	1,19	1,19	1,19	

Tabelle 11.31: Streuspannen der Lageschätzung bei $N = 1 \cdot 10^5$, $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,30$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	2,47	1,45	1,29	1,22	1,16	1,14
	5	2,27	1,40	1,27	1,20	1,15	1,12
	6	2,07	1,36	1,23	1,17	1,13	1,11
	7	1,97	1,33	1,21	1,16	1,12	1,10
	8	1,86	1,30	1,20	1,15	1,11	1,09
	9	1,81	1,28	1,19	1,14	1,11	1,09
	10	1,73	1,26	1,18	1,13	1,10	1,08
	11	1,69	1,25	1,17	1,13	1,09	1,08
	12	1,65	1,24	1,16	1,12	1,09	1,08
	13	1,62	1,23	1,15	1,11	1,09	1,07
	14	1,60	1,22	1,15	1,11	1,08	1,07
	15	1,57	1,21	1,14	1,11	1,08	1,07
	16	1,55	1,20	1,14	1,10	1,08	1,07
	17	1,52	1,19	1,13	1,10	1,08	1,06
	18	1,50	1,19	1,13	1,10	1,07	1,06
	19	1,49	1,18	1,12	1,09	1,07	1,06
	20	1,47	1,18	1,12	1,09	1,07	1,06
	25	1,41	1,16	1,11	1,08	1,06	1,05
	30	1,37	1,14	1,10	1,07	1,06	1,05
	35	1,33	1,13	1,09	1,07	1,05	1,04
40	1,31	1,12	1,09	1,07	1,05	1,04	
45	1,29	1,12	1,08	1,06	1,05	1,04	
50	1,27	1,11	1,08	1,06	1,04	1,04	
60	1,25	1,10	1,07	1,05	1,04	1,03	
70	1,23	1,09	1,06	1,05	1,04	1,03	
80	1,21	1,09	1,06	1,04	1,03	1,03	
90	1,20	1,08	1,06	1,04	1,03	1,03	
100	1,19	1,08	1,05	1,04	1,03	1,03	

Tabelle 11.32: Streuspannen der Neigungsschätzung, $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,10$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	3,95	1,78	1,47	1,35	1,25	1,21
	5	3,60	1,68	1,43	1,31	1,23	1,19
	6	3,14	1,57	1,37	1,28	1,20	1,17
	7	2,89	1,53	1,34	1,25	1,19	1,16
	8	2,63	1,49	1,31	1,23	1,17	1,15
	9	2,49	1,45	1,29	1,22	1,17	1,14
	10	2,35	1,42	1,28	1,21	1,16	1,13
	11	2,26	1,40	1,26	1,20	1,15	1,12
	12	2,19	1,37	1,25	1,19	1,14	1,12
	13	2,10	1,36	1,24	1,18	1,13	1,11
	14	2,04	1,34	1,23	1,17	1,13	1,11
	15	1,98	1,33	1,22	1,16	1,12	1,10
	16	1,95	1,32	1,21	1,16	1,12	1,10
	17	1,91	1,31	1,20	1,15	1,12	1,10
	18	1,86	1,30	1,20	1,15	1,11	1,09
	19	1,84	1,29	1,19	1,15	1,11	1,09
	20	1,82	1,28	1,19	1,14	1,11	1,09
	25	1,68	1,25	1,17	1,13	1,09	1,08
	30	1,61	1,22	1,15	1,11	1,09	1,07
	35	1,55	1,21	1,14	1,11	1,08	1,07
40	1,51	1,19	1,13	1,10	1,07	1,06	
45	1,47	1,18	1,12	1,09	1,07	1,06	
50	1,44	1,17	1,12	1,09	1,07	1,06	
60	1,40	1,15	1,10	1,08	1,06	1,05	
70	1,36	1,14	1,10	1,07	1,06	1,05	
80	1,33	1,13	1,09	1,07	1,05	1,04	
90	1,31	1,12	1,08	1,06	1,05	1,04	
100	1,29	1,12	1,08	1,06	1,05	1,04	

Tabelle 11.33: Streuspannen der Neigungsschätzung, $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0,15$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	5,51	2,16	1,69	1,48	1,35	1,29
	5	5,06	2,02	1,61	1,44	1,32	1,26
	6	4,28	1,86	1,53	1,38	1,28	1,23
	7	4,15	1,77	1,48	1,35	1,26	1,22
	8	3,65	1,70	1,44	1,32	1,24	1,20
	9	3,39	1,65	1,41	1,30	1,23	1,19
	10	3,24	1,62	1,38	1,28	1,21	1,18
	11	3,04	1,57	1,37	1,27	1,20	1,17
	12	2,84	1,53	1,35	1,26	1,19	1,16
	13	2,80	1,52	1,33	1,25	1,19	1,15
	14	2,63	1,49	1,32	1,24	1,18	1,15
	15	2,60	1,47	1,30	1,23	1,17	1,14
	16	2,45	1,45	1,29	1,22	1,16	1,14
	17	2,38	1,43	1,28	1,21	1,16	1,13
	18	2,31	1,41	1,27	1,21	1,15	1,13
	19	2,30	1,40	1,27	1,20	1,15	1,12
	20	2,22	1,39	1,26	1,20	1,14	1,12
	25	2,02	1,34	1,23	1,17	1,13	1,11
	30	1,89	1,31	1,21	1,16	1,12	1,10
	35	1,80	1,28	1,19	1,14	1,11	1,09
40	1,73	1,26	1,18	1,13	1,10	1,08	
45	1,68	1,24	1,17	1,12	1,09	1,08	
50	1,62	1,23	1,16	1,12	1,09	1,07	
60	1,57	1,21	1,14	1,11	1,08	1,07	
70	1,51	1,19	1,13	1,10	1,08	1,06	
80	1,47	1,18	1,12	1,09	1,07	1,06	
90	1,44	1,17	1,11	1,09	1,07	1,05	
100	1,41	1,16	1,11	1,08	1,06	1,05	

Tabelle 11.34: Streuspannen der Neigungsschätzung, $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,20$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	6,85	2,65	1,95	1,65	1,47	1,39
	5	6,40	2,45	1,82	1,58	1,42	1,34
	6	5,66	2,17	1,70	1,50	1,36	1,30
	7	5,23	2,06	1,66	1,47	1,33	1,28
	8	4,93	1,96	1,58	1,42	1,31	1,25
	9	4,58	1,89	1,55	1,40	1,29	1,24
	10	4,21	1,82	1,51	1,37	1,27	1,23
	11	4,00	1,77	1,49	1,35	1,26	1,22
	12	3,76	1,72	1,45	1,33	1,24	1,20
	13	3,57	1,68	1,43	1,32	1,23	1,20
	14	3,42	1,66	1,41	1,30	1,23	1,19
	15	3,28	1,62	1,40	1,29	1,21	1,18
	16	3,21	1,59	1,38	1,28	1,21	1,18
	17	3,01	1,57	1,36	1,27	1,20	1,17
	18	2,90	1,56	1,35	1,26	1,20	1,16
	19	2,90	1,53	1,35	1,25	1,19	1,16
	20	2,79	1,51	1,33	1,25	1,18	1,15
	25	2,48	1,45	1,29	1,21	1,16	1,14
	30	2,27	1,40	1,26	1,20	1,15	1,12
	35	2,12	1,36	1,25	1,18	1,13	1,11
40	2,01	1,34	1,22	1,17	1,13	1,11	
45	1,94	1,32	1,21	1,16	1,12	1,10	
50	1,87	1,30	1,20	1,15	1,11	1,10	
60	1,75	1,27	1,18	1,14	1,10	1,09	
70	1,68	1,25	1,17	1,12	1,09	1,08	
80	1,62	1,23	1,16	1,12	1,09	1,07	
90	1,57	1,21	1,14	1,11	1,08	1,07	
100	1,53	1,20	1,14	1,10	1,08	1,07	

Tabelle 11.35: Streuspannen der Neigungsschätzung, $s_{\log, N, GG, 50\%} = 0,25$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	7,92	3,31	2,26	1,84	1,58	1,47
	5	7,24	2,94	2,09	1,73	1,52	1,43
	6	6,70	2,62	1,90	1,64	1,45	1,37
	7	6,38	2,46	1,82	1,58	1,42	1,34
	8	5,90	2,28	1,75	1,53	1,39	1,31
	9	5,54	2,16	1,70	1,49	1,36	1,30
	10	5,20	2,06	1,65	1,46	1,33	1,28
	11	5,01	1,99	1,61	1,44	1,32	1,26
	12	4,68	1,92	1,57	1,42	1,30	1,25
	13	4,52	1,89	1,55	1,39	1,29	1,24
	14	4,25	1,82	1,52	1,37	1,27	1,23
	15	4,26	1,80	1,50	1,36	1,26	1,22
	16	3,94	1,76	1,48	1,35	1,26	1,21
	17	3,87	1,72	1,46	1,34	1,25	1,21
	18	3,74	1,71	1,44	1,33	1,24	1,20
	19	3,56	1,68	1,43	1,32	1,23	1,20
	20	3,44	1,65	1,42	1,30	1,23	1,19
	25	2,99	1,56	1,37	1,27	1,20	1,17
	30	2,74	1,50	1,32	1,24	1,18	1,15
	35	2,51	1,45	1,30	1,22	1,17	1,14
40	2,34	1,42	1,28	1,20	1,15	1,13	
45	2,24	1,39	1,26	1,19	1,15	1,12	
50	2,13	1,37	1,25	1,18	1,14	1,12	
60	1,97	1,33	1,22	1,16	1,12	1,10	
70	1,88	1,30	1,20	1,15	1,11	1,10	
80	1,80	1,28	1,19	1,14	1,11	1,09	
90	1,74	1,26	1,18	1,13	1,10	1,08	
100	1,70	1,25	1,17	1,13	1,10	1,08	

Tabelle 11.36: Streuspannen der Neigungsschätzung, $s_{\log,N,GG,50\%} = 0,30$

		Spreizung N_2/N_1					
		2	5	10	20	50	100
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	4	13,63	13,13	12,71	13,11	13,23	12,95
	5	13,01	13,19	13,27	13,70	13,01	13,10
	6	4,65	4,66	4,66	4,77	4,73	4,67
	7	4,69	4,63	4,72	4,70	4,60	4,66
	8	3,25	3,27	3,30	3,25	3,24	3,29
	9	3,23	3,27	3,25	3,24	3,26	3,26
	10	2,69	2,73	2,66	2,70	2,70	2,69
	11	2,69	2,69	2,73	2,69	2,69	2,69
	12	2,43	2,36	2,40	2,39	2,40	2,39
	13	2,38	2,41	2,39	2,39	2,39	2,40
	14	2,20	2,19	2,18	2,18	2,21	2,21
	15	2,20	2,20	2,17	2,18	2,19	2,22
	16	2,04	2,07	2,07	2,05	2,06	2,06
	17	2,05	2,05	2,05	2,06	2,05	2,07
	18	1,96	1,96	1,96	1,96	1,95	1,95
	19	1,96	1,96	1,95	1,96	1,95	1,96
	20	1,88	1,88	1,88	1,87	1,86	1,89
	25	1,76	1,76	1,77	1,77	1,76	1,76
	30	1,65	1,64	1,65	1,65	1,65	1,65
	35	1,59	1,59	1,60	1,59	1,59	1,59
40	1,53	1,53	1,53	1,53	1,53	1,53	
45	1,50	1,49	1,49	1,50	1,49	1,49	
50	1,46	1,46	1,45	1,46	1,46	1,45	
60	1,40	1,40	1,40	1,40	1,41	1,40	
70	1,38	1,37	1,37	1,37	1,37	1,37	
80	1,34	1,34	1,34	1,34	1,34	1,34	
90	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	
100	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	

Tabelle 11.37: Streuspannen der Standardabweichungsschätzung

11.4 Streuspannen des Treppenstufenverfahrens mit erweiterter IABG-Methode

		$s_{\log,S,GG,50\%}$			
		0,02	0,03	0,04	0,05
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	10	1,07	1,10	1,12	1,16
	11	1,06	1,10	1,12	1,13
	12	1,06	1,09	1,10	1,13
	13	1,06	1,09	1,10	1,12
	14	1,06	1,08	1,10	1,12
	16	1,05	1,07	1,09	1,11
	18	1,05	1,07	1,09	1,11
	20	1,04	1,07	1,08	1,10
	25	1,04	1,06	1,08	1,09
	30	1,04	1,05	1,07	1,09
	35	1,03	1,05	1,06	1,08
	40	1,03	1,04	1,06	1,07
	50	1,03	1,04	1,05	1,07
	60	1,02	1,04	1,05	1,06
	70	1,02	1,03	1,04	1,05
	80	1,02	1,03	1,04	1,05
	90	1,02	1,03	1,04	1,05
100	1,02	1,03	1,04	1,05	

Tabelle 11.38: Streuspannen der Mittelwertschätzung, $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$

		$s_{\log,S,GG,50\%}$			
		0,02	0,03	0,04	0,05
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	10	10,44	10,01	9,21	8,72
	11	10,48	9,60	8,86	8,31
	12	9,68	8,77	8,01	7,70
	13	9,22	8,39	7,64	7,19
	14	8,77	7,48	7,02	6,71
	16	7,38	6,64	6,22	5,83
	18	6,49	5,74	5,43	5,19
	20	5,62	5,14	4,83	4,68
	25	4,46	4,06	3,82	3,74
	30	3,59	3,35	3,23	3,14
	35	3,06	2,90	2,85	2,78
	40	2,69	2,60	2,56	2,51
	50	2,28	2,23	2,19	2,20
	60	2,03	2,01	1,98	2,00
	70	1,89	1,88	1,86	1,86
	80	1,80	1,80	1,78	1,79
90	1,74	1,73	1,73	1,73	
100	1,70	1,70	1,69	1,70	

Tabelle 11.39: Streuspannen der Standardabweichungsschätzung,
 $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0$

11.5 Streuspannen des Abgrenzungsverfahrens

		$s_{\log,S,GG,50\%}$			
		0,02	0,03	0,04	0,05
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	10	1,08	1,12	1,16	1,19
	11	1,08	1,11	1,15	1,18
	12	1,07	1,11	1,14	1,18
	13	1,07	1,10	1,14	1,17
	14	1,07	1,10	1,13	1,17
	16	1,06	1,09	1,12	1,16
	18	1,06	1,09	1,11	1,14
	20	1,06	1,08	1,11	1,14
	25	1,05	1,07	1,10	1,12
	30	1,04	1,07	1,09	1,11
	35	1,04	1,06	1,08	1,10
	40	1,04	1,06	1,07	1,09
	50	1,03	1,05	1,07	1,08
	60	1,03	1,04	1,06	1,07
	70	1,03	1,04	1,05	1,07
	80	1,02	1,04	1,05	1,06
90	1,02	1,03	1,05	1,06	
100	1,02	1,03	1,04	1,06	

Tabelle 11.40: Streuspannen der Mittelwertschätzung,
 $s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0, x_{Abgr} = 2,0$

		$s_{\log,S,GG,50\%}$			
		0,02	0,03	0,04	0,05
Zu Beginn der Prüfung vorhandener Stichprobenumfang n	10	4,06	4,05	4,07	3,95
	11	3,86	3,81	3,78	3,77
	12	3,89	3,86	3,87	3,84
	13	3,78	3,73	3,60	3,67
	14	3,79	3,77	3,75	3,63
	16	3,65	3,59	3,51	3,51
	18	3,54	3,47	3,38	3,37
	20	3,40	3,34	3,25	3,23
	25	3,08	2,97	2,98	2,99
	30	2,82	2,82	2,76	2,75
	35	2,72	2,62	2,60	2,60
	40	2,52	2,54	2,45	2,45
	50	2,31	2,30	2,28	2,27
	60	2,15	2,13	2,15	2,11
	70	2,05	2,02	2,03	2,02
	80	1,96	1,93	1,93	1,92
90	1,88	1,89	1,86	1,85	
100	1,82	1,81	1,81	1,81	

Tabelle 11.41: Streuspannen der Standardabweichungsschätzung,

$$s_{\log,S,GG,50\%}/\lg(d) = 1,0, x_{Abgr} = 2,0$$

11.6 Analytische Mittelwertstreuung für Stichproben aus einer Grundgesamtheit mit logarithmischer Normalverteilung

Die arithmetischen Mittelwerte aus einer normalverteilten Grundgesamtheit folgen wiederum einer Normalverteilung, [Fahr 07]. Eine logarithmische Normalverteilung verhält sich wie eine Normalverteilung, wenn alle Merkmalswerte logarithmiert werden. Die logarithmischen Mittelwerte $N_{50\%,SP}$ der Stichprobe mit Stichprobenumfang n , stammend aus einer Grundgesamtheit mit logarithmischem Mittelwert $N_{50\%,GG}$ und logarithmischer Standardabweichung $s_{\log,N,GG}$ lassen sich daher auf die Standardnormalverteilung mit Quantil u transformieren.

$$u = \frac{\lg(N_{50\%,SP}) - \lg(N_{50\%,GG})}{s_{\log,N,GG}} \cdot \sqrt{n} \quad (11.1)$$

Für das 10 %- bzw. das 90 %-Quantil des arithmetischen Mittelwerts folgt aus Gleichung (11.1):

$$\lg(N_{50\%,SP,10\%}) = \lg(N_{50\%,GG}) + u_{10\%} \cdot \frac{s_{\log,N,GG}}{\sqrt{n}} \quad (11.2)$$

$$\lg(N_{50\%,SP,90\%}) = \lg(N_{50\%,GG}) + u_{90\%} \cdot \frac{s_{\log,N,GG}}{\sqrt{n}} \quad (11.3)$$

Delogarithmieren von Gleichung (11.2) und Gleichung (11.3) ergibt:

$$N_{50\%,SP,10\%} = N_{50\%,GG} \cdot 10^{u_{10\%} \cdot \frac{s_{\log,N,GG}}{\sqrt{n}}} \quad (11.4)$$

$$N_{50\%,SP,90\%} = N_{50\%,GG} \cdot 10^{u_{90\%} \cdot \frac{s_{\log,N,GG}}{\sqrt{n}}} \quad (11.5)$$

Damit lässt sich die Streuspanne T angeben:

$$T = \frac{N_{50\%,SP,90\%}}{N_{50\%,SP,10\%}} = \frac{N_{50\%,GG} \cdot 10^{u_{90\%} \cdot \frac{s_{\log,N,GG}}{\sqrt{n}}}}{N_{50\%,GG} \cdot 10^{u_{10\%} \cdot \frac{s_{\log,N,GG}}{\sqrt{n}}}} = \frac{10^{u_{90\%} \cdot \frac{s_{\log,N,GG}}{\sqrt{n}}}}{10^{u_{10\%} \cdot \frac{s_{\log,N,GG}}{\sqrt{n}}}} \quad (11.6)$$

Gleichung (11.6) zeigt, dass die Mittelwertstreuung für Stichproben aus einer Grundgesamtheit mit logarithmischer Normalverteilung unabhängig ist vom logarithmischen Mittelwert $N_{50\%,GG}$. Weiterhin lässt sich Gleichung (11.6) entnehmen, dass die Streuspanne abhängig ist von der logarithmischen Standardabweichung $s_{\log,N,GG}$ der Grundgesamtheit und für große Stichprobenumfänge n gegen $T = 1$ tendiert.

11.7 Analytische Varianzstreuspanne für Stichproben aus einer Grundgesamtheit mit logarithmischer Normalverteilung

Die logarithmischen Stichprobenvarianzen $s_{\log,N,SP}^2$ mit Stichprobenumfang n aus einer logarithmisch-normalverteilten Grundgesamtheit mit logarithmischer Varianz $s_{\log,N,GG}^2$ folgen der χ^2 -Verteilung, [Fahr 07].

$$\frac{(n-1) \cdot s_{\log,N,SP}^2}{s_{\log,N,GG}^2} = \chi_{n-1}^2 \quad (11.7)$$

Mit Gleichung (11.7) lässt sich das 10 %- bzw. das 90 %-Quantil der Stichprobenvarianz berechnen:

$$s_{\log,N,SP,10\%}^2 = \chi_{n-1,10\%}^2 \cdot \frac{s_{\log,N,GG}^2}{n-1} \quad (11.8)$$

$$s_{\log,N,SP,90\%}^2 = \chi_{n-1,90\%}^2 \cdot \frac{s_{\log,N,GG}^2}{n-1} \quad (11.9)$$

Damit ergibt sich die Streuspanne T zu:

$$T = \frac{s_{\log,N,SP,90\%}^2}{s_{\log,N,SP,10\%}^2} = \frac{\chi_{n-1,90\%}^2 \cdot \frac{s_{\log,N,GG}^2}{n-1}}{\chi_{n-1,10\%}^2 \cdot \frac{s_{\log,N,GG}^2}{n-1}} = \frac{\chi_{n-1,90\%}^2}{\chi_{n-1,10\%}^2} \quad (11.10)$$

Gleichung (11.10) verdeutlicht, dass die Streuspanne der Stichprobenvarianzen aus einer logarithmischen Normalverteilung unabhängig sind von der logarithmischen Varianz $s_{\log,N,GG}^2$ der Grundgesamtheit.

11.8 Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Christian Müller
Geburtstag: 20. Oktober 1984
Geburtsort: Clausthal-Zellerfeld
Familienstand: ledig

Schulbildung

1991-1995: Glückauf Grundschule in St. Andreasberg
1995-1997: Orientierungsstufe Braunlage in St. Andreasberg
1997-2004: Robert-Koch-Schule in Clausthal-Zellerfeld
2004: Abitur an der Robert-Koch-Schule in Clausthal-Zellerfeld

Hochschulausbildung

Oktober 2004-September 2010: Diplom Studium Maschinenbau an der TU Clausthal
September 2007-Februar 2008: Diplom Studium Maschinenbau an der ČVUT v Praze (ERAMUS-Auslandssemester)
August 2010: Abschluss als Diplom-Ingenieur

Berufliche Tätigkeit

seit Oktober 2010: Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Maschinelle Anlagentechnik und Betriebsfestigkeit der TU Clausthal