

# Über den Einfluss der Abschätzung des elastisch-plastischen Beanspruchungszustandes auf die rechnerische Lebensdauervorhersage

R. Burghardt, M. Wächter, A. Esderts

Institut für Maschinelle Anlagentechnik und Betriebsfestigkeit – TU Clausthal

ralf.burghardt@imab.tu-clausthal.de

---

## Abstract

Die rechnerische Lebensdauerabschätzung mit dem Örtlichen Konzept erfordert die Bestimmung lokaler Spannungen und Dehnungen bei elastisch-plastischem Materialverhalten. Da elastisch-plastische Finite-Elemente-Rechnungen für lange Last-Zeit-Folgen umfangreiche Rechenressourcen erfordern, werden sogenannte Kerbnäherungsverfahren wie beispielsweise die Neuber-Regel zur Abschätzung verwendet.

In der Literatur sind viele verschiedene Kerbnäherungsverfahren zu finden. Deren Treffsicherheit ist i.d.R. nur für Spezialfälle bekannt. Der Einfluss auf die rechnerische Lebensdauerabschätzung wurde bisher noch nicht systematisch untersucht.

In diesem Beitrag werden unterschiedliche Kerbnäherungsverfahren in die Lebensdauerabschätzung nach dem Örtlichen Konzeptes implementiert. Mit einer umfangreichen Datenbasis aus der Datenbank Betriebsfestigkeit (DaBef) wird die Relevanz der Kerbnäherung auf die Treffsicherheit der Lebensdauerabschätzung untersucht. Hierbei zeigt sich, dass der Einfluss nicht vernachlässigbar ist und eine Verbesserung der Abschätzformeln eine wesentliche Erhöhung der Treffsicherheit ermöglicht.

---

## 1 Einleitung

Das Örtliche Konzept (ÖK), auch bekannt als Kerbgrunddehnungskonzept, berücksichtigt den Einfluss des elastisch-plastischen Werkstoffverhalten und ermöglicht somit einen rechnerischen Lebensdauernachweis beginnend bei wenigen Schwingspielen bis in den Bereich der Langzeitfestigkeit. Hierbei ist das ÖK historisch aus mehreren Modulen zusammengestellt, vergleiche beispielsweise *Abb. 1*.

Mit der im Jahr 2019 erschienenen neuen FKM-Richtlinie „Rechnerischer Festigkeitsnachweis unter expliziter Erfassung nichtlinearen Werkstoffverformungsverhaltens“ [1] wurde die Anwendung des Örtlichen Konzeptes standardisiert, wobei der o.g. modulare

Aufbau erhalten bleibt. [1] stellt gleichzeitig einen definierten Ausgangspunkt für Variantenrechnungen dar, mit denen alternative Vorgehensweisen bezüglich einer Erhöhung der Treffsicherheit bewertet werden können. Ein Bestandteil des Berechnungsalgorithmus ist das sog. „Kerbnäherungsverfahren“, welches den Zusammenhang aus elastizitätstheoretischen Spannungen und Dehnungen zu deren elastisch-plastischen Äquivalenten herstellt.

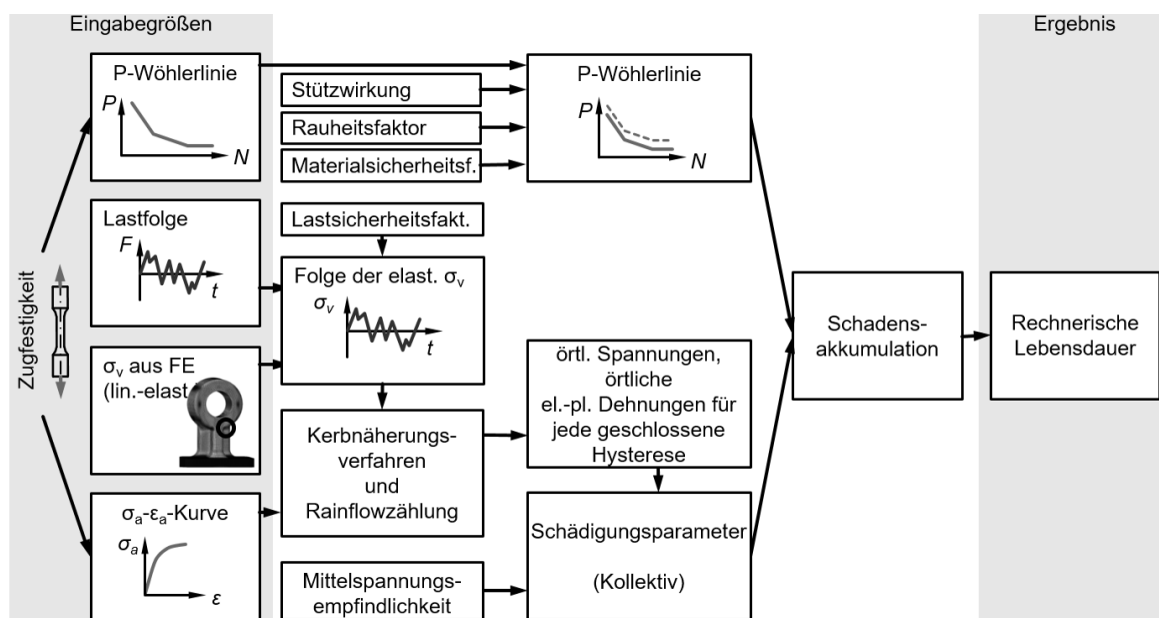


Abb. 1: Übersicht über die Berechnungsmodule des Örtlichen Konzept in der Ausprägung der FKM-Richtlinie Nichtlinear

Der Einfluss von Kerbnäherungsverfahren auf die Treffsicherheit der rechnerischen Lebensdauerabschätzung wurde bisher noch nicht systematisch untersucht. Unter Verwendung von experimentellen Bauteillebensdauern der Datenbank Betriebsfestigkeit (DaBef) können systematisch verschiedene Kerbnäherungsverfahren evaluiert werden. In diesem Beitrag werden daher Kerbnäherungsverfahren aus der Literatur [2–14] zusammengestellt und in den Berechnungsablauf für einen der in [1] vorgeschlagenen Schädigungsparameter ( $P_{RAM}$ ) integriert. Die Bewertung erfolgt beispielhaft für die Werkstoffgruppe Stahl, ist aber mit der DaBef grundsätzlich auch für Aluminium möglich.

## 2 Datenbank Betriebsfestigkeit

Im Rahmen mehrerer FKM-Forschungsvorhaben wurde eine Sammlung mit Betriebsfestigkeitsversuchen zusammengetragen, die zu einer Datenbank zusammengefasst wurde [15]. Für diesen Beitrag sind aus der DaBef alle Datensätze ausgewählt worden,

die die Kriterien *Prüfung bei Raumtemperatur, nichtgeschweißtes Bauteil, einachsige Belastung, vorliegende Anrisschwingspielzahl* und *Werkstoffgruppe Stahl* erfüllen. Hierdurch verbleibt die folgende Datenbasis mit:

- 624 Einzelversuche mit **konstanter Amplitude (KA)**
- 650 Einzelversuche mit **variabler Amplitude (VA)**

Diese Datenbasis wurde so aufbereitet, dass die Versuchsergebnisse automatisiert nach [1] unter Variation der Kerbnäherungsverfahren nachgerechnet werden können.

### 3 Kerbnäherungen

Die Berechnung von elastisch-plastischen Beanspruchungszuständen mittels elastisch-plastischen Finite-Elemente-Rechnungen (FE-Rechnungen) für komplette Last-Zeit-Folgen ist aufgrund des rechnerischen Aufwands bisher noch nicht Stand der Technik. Im ÖK hat sich daher die Möglichkeit etabliert, den elastisch-plastischen Beanspruchungszustand mit sogenannten Kerbnäherungen zu schätzen. Die bekannteste Kerbnäherungsformel wurde von Neuber [2] im Jahr 1961 an einer schubbelasteten prismatischen Kerbe hergeleitet und postuliert die Gleichheit des Produkts aus elastizitätstheoretischer Spannung  $\sigma_e$  und Dehnung  $\varepsilon_e$  zu der real vorliegendem elastisch-plastischen Dehnung  $\varepsilon$  und Spannung  $\sigma$ , Gleichung (1).

$$\sigma_e \cdot \varepsilon_e = \sigma \cdot \varepsilon \quad (1)$$

Die Verallgemeinerung auf beliebige einachsige Beanspruchungszustände und die generelle Anwendung der Kerbnäherung nach Neuber auf andere Kerbgeometrien wurde von Topper et. al [16] vorgeschlagen. In [1] werden die dort angegebenen Kerbnäherungen auch explizit auf mehrachsig proportionale Beanspruchungen angewendet. Es muss jedoch festgehalten werden, dass die jeweils gewählte Kerbnäherung nur für den konkreten Fall, anhand dessen sie abgeleitet wurde, exakt und damit nachgewiesen treffsicher ist. Aus diesem Grund existieren in der Literatur weitere Kerbnäherungsverfahren. Hierunter gibt es eigenständige Lösungen, wie beispielsweise die ASME-Regel [4] oder die ESED-Methode nach Glinka [10]. Zusätzlich existieren diverse Ansätze die Kerbnäherung nach Neuber weiter zu verbessern, z.B. Kühnapfel [7], Kujawski [13] oder Seeger et. al. [9]. Der erforderliche rechnerische Aufwand bei der Anwendung variiert sehr stark. Während die Neuber-Modifikationen nach Kühnapfel oder Kujawski beispielsweise nur die elastische Poisson-Zahl und plastische Poisson-Zahl benötigen, verwen-

den Seeger et. al. mit der plastischen Formzahl  $K_p$  einen Kennwert, der aufwendig mittels (je Bauteil einmaliger) elastisch-plastischer FE-Rechnung ermittelt werden muss [9].

Im Rahmen dieses Beitrags werden Kerbnäherungsverfahren genauer betrachtet, die theoretisch für beliebig komplexe Geometrien anwendbar sind und keine Kenntnis der elastizitätstheoretischen Formzahl oder Nennspannungen erfordern. *Tabelle 1* listet die betrachteten Kerbnäherungsverfahren mit dem im Weiteren verwendeten Kurznamen auf. Zusätzlich ist dort angegeben, ob das Verfahren eine Modifikation der Kerbnäherung nach Neuber darstellt, oder als eigener Ansatz interpretiert werden kann.

*Tab 1: Auflistung aller in diesem Beitrag untersuchten Kerbnäherungsverfahren*

Kurzname	Name	Quelle	Jahr	Neubermodifikation?
<i>Neub</i>	Neuberregel bekannteste Version	[2]	1964	–
<i>Dixon</i>	Dixon	[3]	1964	Nein
<i>ASME</i>	ASME/Linear Rule	[4]	1971	Nein
<i>Diet</i>	Dietmann und Saal	[5,6]	1975	Nein
<i>Kühn</i>	Kühnapfels Modifikation der Neuberregel	[7]	1976	Ja
<i>Seeg</i>	Seeger und Beste	[8]	1977	Nein
<i>NeubKp</i>	Neuberregel mit der plastischen Formzahl	[9]	1980	Ja
<i>Glinka</i>	ESED-Methode nach Glinka	[10]	1981	Nein
<i>Sons</i>	Verfahren nach Sonsino	[11]	1982	Ja
<i>Inter</i>	Intermediate Rule	[12]	1991	Nein
<i>Kuja</i>	Kujawskis Modifikation der Neuberregel	[13]	2014	Ja
<i>Ball</i>	Generalisierte Neuberkurve durch Ball	[14]	2020	Ja

#### **4 Einfluss der Kerbnäherungen auf die Treffsicherheit**

Die in *Tab. 1* aufgelisteten Kerbnäherungsverfahren werden in das Modul Kerbnäherung im Algorithmus [1] integriert. Für jedes Kerbnäherungsverfahren werden mit der o.g. Datenbasis Lebensdauerberechnungen durchgeführt. Die einzelnen Sicherheitsfaktoren werden zu 1 gesetzt, sodass die resultierende rechnerische Lebensdauer einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 50 % entspricht. Die zu den Datensätzen gehörenden experimentellen Anrisschwingspielzahlen  $N_{exp}$  werden zu den jeweils sich ergebenden rechnerischen Lebensdauern  $N_{calc}$  ins Verhältnis  $V$  gesetzt, Gleichung (2).

$$V = N_{exp} / N_{calc} \quad (2)$$

Anschließend kann die Streuspanne T und der Median M dieser Verhältnisse für jeden Fall ausgewertet werden. Die Streuspanne ist definiert als das Verhältnis aus dem 90 % Quantil zu dem 10 % Quantil, Gleichung (3).

$$T = V_{90\%} / V_{10\%} \quad (3)$$

Im Fall einer ideal treffsicheren Berechnung müssen sowohl Median als auch Streuspanne bei 1 liegen. In Realität weicht M nach beiden Seiten von 1 ab, T wird größer als 1 sein.

Die sich ergebenden Mediane M und Streuspannen T sind für den Festigkeitsnachweis mit dem Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  in *Tab. 2* nach Versuchsart sortiert dargestellt. Zur Quantifizierung des Einflusses des Kerbnäherungsverfahrens werden jeweils die Streuspannen der Streuspannen und Mediane und die Mediane der Streuspannen und Mediane gebildet. Beispielsweise kann anhand der Streuspanne der Mediane eine Aussage getroffen werden, wie groß der Einfluss der Kerbnäherung auf die mittlere Treffsicherheit ist.

*Tab 2: Mediane und Streuspannen der Verhältnisse aus rechnerischer zu experimenteller Lebensdauer bei Anwendung der verschiedenen Kerbnäherungsverfahren*

Kurzname	Median M		Streuspanne T	
	KA	VA	KA	VA
<i>Neub</i>	3,00	1,15	10,09	10,05
<i>Dixon</i>	2,98	1,52	11,64	10,83
<i>ASME</i>	0,96	0,71	13,50	11,61
<i>Diet</i>	1,81	0,87	9,28	12,19
<i>Kühn</i>	1,39	0,59	8,27	9,97
<i>Seeg</i>	2,14	1,01	11,39	15,53
<i>NeubKp</i>	3,35	1,36	9,34	13,17
<i>Glinka</i>	1,64	0,86	11,42	10,69
<i>Sons</i>	1,83	0,92	11,26	10,73
<i>Inter</i>	1,86	0,93	11,33	10,65
<i>Kuja</i>	2,07	0,82	9,28	10,04
<i>Ball</i>	1,93	1,36	16,96	11,79
M der Spalten	1,90	0,93	11,30	10,73
T der Spalten	2,11	1,92	1,43	1,31

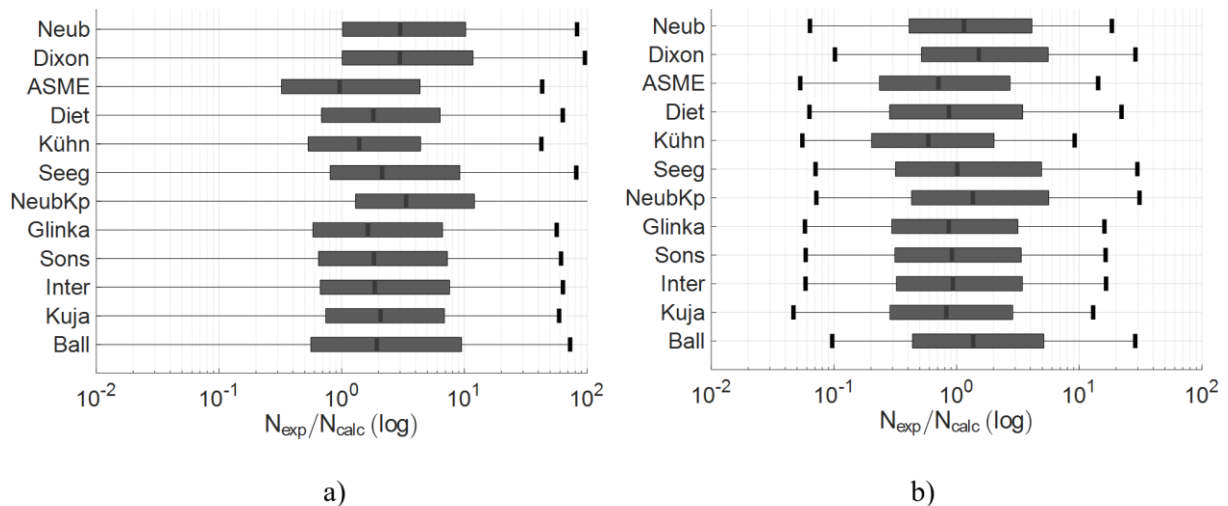


Abb 2: Verteilung der Verhältnisse aus experimenteller Schwingenzahl und rechnerischer Schwingenzahl bei Anwendung verschiedener Kerbnäherungsverfahren bei Versuchen mit konstanter Amplitude (a) und mit variabler Amplitude (b)

Der Tab. 2 kann anhand der Streuspanne der Mediane entnommen werden, dass der Austausch des Kerbnäherungsverfahrens dazu führt, dass der sich einstellende Median der Verhältnisse  $V$  in 80 % der Fälle um den Faktor  $\sim 2$  abweichen kann. Anders ausgedrückt streut die Mittlere Treffsicherheit des Berechnungskonzepts in Abhängigkeit des gewählten Kerbnäherungsverfahrens zwischen den Werten 1,5 und 3 im Fall von konstanten Amplituden und zwischen 0,7 und 1,4 im Fall von variabler Amplitude.

In Abb. 2a sind die in Tab 2 zusammengefassten Ergebnisse für die Versuche mit konstanter Amplitude und in Abb. 2b für die Versuche mit variabler Amplitude in Form von Boxplots dargestellt. Entgegen der üblichen Konvention, dass die Box die 25% und 75% Quartile begrenzt sind die Boxen in dieser Abbildung so angepasst, dass sie den Quantilen für die Berechnung der Streuspannen  $T$  entspricht, Gleichung (3). Somit ist die Breite der Boxen ein Maß für die Streuspanne  $T$ , während die vertikale Linie in der Box den Median  $M$  beschreibt.

Aus der Tab. 2 und Abb. 2 können folgende Erkenntnisse gewonnen werden:

- Im Fall der Beanspruchung mit konstanter Amplitude liegen alle Kerbnäherungsverfahren im Mittel auf der sicheren Seite.
- Im Fall der Beanspruchung mit variabler Amplitude liegen nahezu alle Kerbnäherungsverfahren bei einem Median nahe 1.
- Der in der FKM-Richtlinie Nichtlinear für den Schädigungsparameter  $P_{RAM}$  empfohlene erweiterte Neuber (hier *NeubKp*)
  - besitzt nach den Erkenntnissen dieser Untersuchungen keinen systematischen Vorteil in der Treffsicherheit.
  - ist zusammen mit der Kerbnäherung nach Seeger und Beste (hier *Seeg*) aufgrund der erforderlichen elastisch-plastischen FE-Rechnung am aufwendigsten in der Anwendung.

- Die Neuber-Modifikation nach Kühnapfel weist die deutlich geringsten Streuspannen auf, ist jedoch im Fall variabler Amplitude sehr unsicher in der Anwendung.
- Die Neuber-Modifikation nach Kujawski, dargestellt in Gleichung (4), bietet den besten Kompromiss aus Minimierung der Streuung, guter Treffsicherheit und akzeptablen Aufwand in der Anwendung.

$$\sigma_e \cdot \varepsilon_e = (1 + v_{\text{eff}}) / (1 + \nu) \cdot \sigma \cdot \varepsilon \quad (4)$$

mit  $v_{\text{eff}} = 0,5 - (0,5 - \nu) / (E \cdot \varepsilon_{\text{eq}}) \cdot \sigma_{\text{eq}}$

Hierbei sind  $\nu$  die elastische Poisson-Zahl,  $\varepsilon_{\text{eq}}$  und  $\sigma_{\text{eq}}$  die (iterativ zu bestimmenden) elastisch-plastische Vergleichsdehnung und Vergleichsspannung.

## 5 Fazit

In diesem Beitrag wird anhand der Berechnung der Lebensdauer mit der FKM-Richtlinie Nichtlinear unter Verwendung des Schädigungsparameters  $P_{\text{RAM}}$  gezeigt, dass die Wahl des Kerbnäherungsverfahrens einen großen Einfluss auf die Treffsicherheit der rechnerischen Lebensdauerabschätzung hat. Sowohl die resultierenden Streuspannen der Ergebnisse als auch die mittlere Treffsicherheit der rechnerischen Abschätzung sind in erheblichem Maße abhängig vom gewählten Kerbnäherungsverfahren. Somit wird deutlich, dass die Verbesserung von Kerbnäherungsverfahren ein hohes Potenzial zur Verbesserung der rechnerischen Lebensdauerabschätzung im Allgemeinen bietet. Für den Spezialfall der FKM-Richtlinie Nichtlinear mit dem Schädigungsparameter  $P_{\text{RAM}}$  zeigt sich, dass die Neuber-Modifikation nach Kujawski eine sinnvolle Alternative zu der, um die plastische Formzahl erweiterten und in der Richtlinie festgelegten, modifizierten Neuber-Regel, darstellt.

## Literatur

- [1] Fiedler, M.; Wächter, M.; Varfolomeev, I.; Esderts, A.; Vormwald, M.: Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile unter expliziter Erfassung nicht-linearen Werkstoffverformungsverhaltens. FKM-Richtlinie Nichtlinear. Frankfurt: VDMA-Verlag, 2019
- [2] Neuber H.: Theory of Stress Concentration for Shear-Strained Prismatical Bodies With Arbitrary Nonlinear Stress-Strain Law. Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics (1961), S.544–550

- [3] Dixon, J.R.; Strannigan, J. S.: Effect of plastic deformation on the strain distribution around cracks in sheet materials. *Journal of Mechanical Engineering Science* 6.2 (1964) S.132–136.
- [4] Stephens, R. I.; Fatemi, A.; Stephens, R. R.; Fuchs, H. O.: *Metal fatigue in engineering*. (2000) John Wiley & Sons.
- [5] Dietmann, H.: Zur Bestimmung der Dehnungsformzahl nach der Neuberschen Formel. *Materialprüf.* 17 (1975) 2 S.44–46
- [6] Saal, H.: Näherungsformeln für die Dehnungsformzahl, *Materialprüf.* 17 (1975) 11 S.395–398
- [7] Kühnapfel, K.-F.: Kerbdehnungen und Kerbspannungen bei elastoplastischer Beanspruchung, rechnerische Ermittlung, Vergleich mit Versuchsergebnissen. Dissertation RWTH Aachen, 1976
- [8] Seeger, T.; Beste, A.: Zur Weiterentwicklung von Näherungsformeln für die Berechnung von Kerbbeanspruchungen im elastisch-plastischen Bereich. *Fortschrittsberichte der VDI-Zeitschriften Reihe 18 Nr.2* (1977) S.1–45
- [9] Seeger, T.; Heuler, P.: Generalized application of Neuber's rule. *Journal of Testing and Evaluation* 8.4 (1980) S.199–204.
- [10] Molski, K.; Glinka, G.: A method of elastic-plastic stress and strain calculation at a notch root. *Materials Science and Engineering* 50.1 (1981) S.93–100.
- [11] Sonsino, C. M.: Einfluß von Kaltverformungen bis 5% auf das Kurzzeitschwingfestigkeitsverhalten metallischer Werkstoffe. Dissertation TH Darmstadt, 1980
- [12] Gowhari-Anaraki, A. R.; Hardy, S. J.: Low cycle fatigue life predictions for hollow tubes with axially loaded axisymmetric internal projections. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 26.2 (1991) S.133–146.
- [13] Kujawski, D.; Sree, P. C. R.: On deviatoric interpretation of Neuber's rule and the SWT parameter. *Theor. Appl. Fract. Mech.* (2014) S.44–50
- [14] Ball, D. L.: Estimation of elastic-plastic strain response at two-dimensional notches. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* (2020) S.1–22
- [15] Forschungskuratorium Maschinenbau: Datenbank und Auswertesystem Betriebsfestigkeit: Erhöhung der Sicherheit und Wirtschaftlichkeit schwingend beanspruchter Bauteile durch einen verbesserten Festigkeitsnachweis Abschlussbericht Vorhaben Nr. 288, Frankfurt, 2011



[16] Topper, ToH, R. M. Wetzel, Morrow, J.D.: Neuber's rule applied to fatigue of notched specimens. Illinois univ at Urbana dept of theoretical and applied mechanics, 1967.

### **Autorenanschriften**

Ralf Burghardt, M. Sc., Dr.-Ing. Michael Wächter, Prof. Dr.-Ing. Alfons Esderts

Technische Universität Clausthal

Institut für Maschinelle Anlagentechnik und Betriebsfestigkeit

Leibnizstraße 32

38678 Clausthal-Zellerfeld

Telefon: 05323-722156

Telefax: 05323-723516

E-Mail: [ralf.burghardt@tu-clausthal.de](mailto:ralf.burghardt@tu-clausthal.de), [office@imab.tu-clausthal.de](mailto:office@imab.tu-clausthal.de)